Capítulo 

**Maravilhas do Universo**

**Matemático**

A igualdade  é considerada por muitos matemáticos a identidade mais bela. Essa beleza que pode ficar oculta aos olhos de um alguém não versado em matemática se deve ao fato de que ali se encontram os cinco números mais importantes da

Capítulo I

**A Matemática nos**

**Séculos XX e XXI**

Pode-se dizer que a matemática no século XX, começa quando em uma conferência David Hilbert lança 23 problemas, que ele jugava fossem de estrema importância para o desenvolvimento do conhecimento humano como um todo. Isso aconteceu no ano de 1900, no Congresso Internacional de Matemática, oportunidade singular que Hilbert encontrou para listar seus vinte e três problemas, até aquele momento sem solução.

Muitos Historiadores da Ciência acreditam que mais da metade da matemática existente foi desenvolvida a partir de 1900, e alguns dizem que até mesmo após 1950. De fato os vinte e três problemas de David Hilbert contribuíram de maneira significativa para o surgimento de novas áreas, e até mesmo na reformulação de áreas que já existiam. O estudante iniciante tem a impressão de que a matemática é uma ciência antiga e imutável, e que tudo nela já está bem definido cabendo a ele apenas aceitá-la como é. Na verdade esse século e o século passado mostraram que a matemática é uma ciência dinâmica, que há toda uma gama de problemas a ser resolvida.

Na verdade grande parte da matemática, se não toda a matemática, estudada nos ensinos fundamental e médio, e até mesmo no ensino superior, foi desenvolvida nos princípios da formação do homem até aproximadamente o Renascimento, toda a matemática surgida a partir daí é muito abstrata e difícil, e por isso fora do contexto da escola convencional. Mas apesar dessa grande “distância” do cotidiano, a matemática moderna encontrou muitas aplicações no desenvolvimento de várias outras ciências e na criação de muitos campos de pesquisas em diversas áreas do conhecimento humano.

A matemática se desenvolve como ciência independente, tendo seus campos puros de pesquisa, e muitas vezes as aplicações ocorrem dentro desses campos. Mas pode-se dizer que a parte notável do desenvolvimento na matemática moderna foram as aplicações. Apesar da abstração da matemática moderna, os instrumentos matemáticos desenvolvidos encontram aplicabilidade imediata em ramos do conhecimento que acabavam de surgir. Como é o caso da Teoria da Relatividade, e da Mecânica Quântica, que se utiliza de campos matemáticos que até então jugava-se totalmente distante da realidade física; como por exemplo, a geometria em espaços superiores utilizada pela Teoria da Relatividade, e Teoria das Matrizes utilizada pela Mecânica Quântica.

Se a Física pode ser considerada como matemática aplicada, a engenharia é física aplicada. Hoje no dia-a-dia encontramos milagres da engenharia, como os celulares, por exemplo, que são na verdade pura matemática aplicada. Um exemplo importante dessa ligação entre matemática e tecnologia são os computadores. Criados por matemáticos e engenheiros, são peças fundamentais na sociedade atual. Essa forte ligação entre a matemática e a informática fez surgir uma nova área de pesquisa na matemática: a ciência da computação.

Em matemática muitas vezes quando se pesquisa numa área determinada pouco se pensa na aplicabilidade do que se estuda. Dessas “pesquisas puras” por assim dizer vem surgindo nesse século, aplicações espantosas, e resultados inesperados. Como é caso da Teoria dos Números, a mais pura área da matemática, que encontrou aplicações na segurança da informação, e se encontra nas transações bancárias, nos cartões de crédito, nos correios eletrônicos etc.. Às vezes ao se estudar uma aplicação óbvia da matemática se encontra novos campos de estudo puros, como Lorentz que estudava massas de ar e desenvolveu a Teoria do Caos. Como dizia Nikolay Lobachevsky (1792 – 1856): “Não há ramo da Matemática, por mais abstrato que seja que não possa um dia vir a ser aplicado aos fenômenos do mundo real.”.

Os problemas de Hilbert abriram novos horizontes para a Pesquisa matemática. Sendo que alguns deles causaram profundas mudanças e chegaram mesmo a abalar toda a matemática existente. Exemplo disso: o primeiro problema de Hilbert falava da Hipótese do Contínuo de Cantor, deixada em aberto por ele, fundador da Teoria dos Conjuntos. Cantor se perguntava se havia um tipo de infinito entre o infinito enumerável dos Números Naturais, e o do infinito não enumerável dos Racionais. A teoria dos conjuntos parecia ser uma base sólida onde a matemática poderia ser construída, o próprio Hilbert era um profundo admirador dessa teoria.

Cantor Construiu sua teoria tomando como base seres sem definição precisa, e formulou afirmações irrefutáveis e também que não podiam ser provadas sobre esses seres, os axiomas, e a partir daí podia-se criar e se provar outras afirmações, os teoremas. Mas havia nesse método simplificado um detalhe pequeno e fundamental: alguns dos axiomas de Cantor abriam espaços para contradições, isso era inadmissível numa ciência que tentava se sustentar numa base lógica, longe de contradições; o próprio Cantor já se tinha deparado com essa situação, quando percebeu a impossibilidade da existência de um conjunto universal (que contivesse todos os conjuntos). Essa situação piorava com o passar do tempo quando novas contradições iam surgindo era preciso fazer algo para mudar essa situação antes que os Conjuntos fossem obrigatoriamente extintos da matemática, colocando a ciência e os matemáticos num abismo sem fim de dúvidas. Começou uma reforma drástica nos fundamentos da matemática com lógicos como Bertrand Russel. Como ficaram assombrados os matemáticos depois que G.del provou a existência de “teoremas” que não poderiam ser provados nem muito menos refutados, mas assustados ainda ficaram os matemáticos quando Paul Cohen provou ser o primeiro problema de Hilbert um desses estranhos “teoremas”. Na verdade essas afirmações não eram bem Teoremas, pois não podiam ser provadas, o que acontecia era que sua veracidade era consistente com a matemática como um todo; o curioso é que também a falsidade podia ser encarada, podendo a partir daí se criar um matemática também consistente.

Daí se ia por alga abaixo o sonho de matemáticos de colocar a matemática em bases lógicas sólida, Nicolas Bourbaki, um dos maiores e mais enigmáticos matemáticos do século XX disse: “Deus existe porque a matemática é consistente, mas o diabo também porque não podemos provar este fato”. Outro ponto chave nesse século foi o uso de computadores como parte

fundamental na investigação da matemática. Matemáticos como Alan Turing, já acreditavam nos computadores como meio de resolver teoremas. Programava-se um computador, e o abastecia com axiomas, e com base nesses axiomas o computador provava ou refutava as afirmações que lhe fossem apresentadas. Isso colocou em cheque o conceito de demonstração até então vigente e abria uma nova filosofia daquilo que matemáticos conheciam como prova. Foi se utilizando de computadores que G.del Provou seu teorema da impossibilidade de se provar ou refutar certas afirmações.

O ápice da matemática moderna são as aplicações. Áreas até então desvinculadas da física encontraram utilidade na compreensão da natureza, e mesmo do ser humano. A física atual passou a ser mesmo uma área de estudo na matemática. Muitos dos físicos modernos primeiro desenvolveram suas teorias dentro da matemática para só depois estendê-las para os processos físicos. Quando Niels Bohr desenvolveu sua Teoria Quântica, ele sabia que a matemática existente não bastava para estudo e provas nesse novo campo, com base nisso ele buscou inventar uma nova matemática que servisse aos propósitos da nova ciência. Nascia a moderna teoria das Matrizes. A Mecânica Quântica pega emprestada também a Teoria dos Grupos, campo da abstrata Álgebra Moderna, que para muitos era uma invenção matemática sem utilidades práticas, e também da Teoria das probabilidades, dentre outros campos matemáticos. Outro caso seria a Teoria da Relatividade de Einstein que reviveu uma obscura geometria criada por Hiemman, além de se utilizar de ferramentas da análise e do cálculo. Mas não foi apenas dentro da física que a matemática encontrou aplicações, o Cálculo ganhou uma nova veste sendo utilizado nos mais variados campos do conhecimento humano, se tornando uma ferramenta indispensável desde a biologia até as ciências sociais. Sem falar na utilização da matemática para as ciências e engenharias como um todo.

Talvez a mais notável aplicação da matemática seja a informática. Essa nova ciência que surge, cheia de aplicações e que se tornou talvez até um dos ramos do conhecimento mais presente no cotidiano do ser humano. A bem dizer: a internet que está presente em quase tudo que é feito atualmente, desde compras até comunicação, do entretimento até a segurança. Com o estudo moderno do átomo notou-se que a química era na verdade uma área da física. A ciência passou a ser encarada como um todo interligado. Cientistas como Stephen Hawking; um das maiores mentes da atualidade, físico, e matemático que ocupa a mesma cadeira de Newton na universidade de Cambridge; busca criar uma grande teoria unificadora. Na verdade já era um sonho do Gigante Albert Einstein, quando lhe foi apresentado a Mecânica Quântica, Juntar sua Teoria a essa (a teoria do infinitamente pequeno e do infinitamente grande).

Apesar dessa íntima ligação entre ciência e matemática existe uma diferença muito acentuada entre uma prova matemática e uma prova científica. Muitas vezes, para citar um exemplo, para explicar as estranhezas do átomo, os físicos diziam que a natureza era ambígua e que aquilo deveria ser aceito como uma verdade. Pelo menos explicava os fatos até aquele momento conhecidos. Essa abertura é inaceitável em matemática, quando um teorema é provado se espera que independentemente do que vier a acontecer esse teorema continuará a ser verdadeiro. A crise nos fundamentos da matemática fez rever essa rigidez matemática e abriu uma questão fundamental: até que ponto a matemática pode ser encarada em termos rigorosos? Certa vez Einstein afirmou: Deus não joga dado com o universo, Heisenberg, o criador do princípio da incerteza, como resposta disse: Ele não apenas joga como também esconde os dados.

Não apenas em aplicações houve grande desenvolvimento da matemática, mas também em seu campo puro de atuação. Como exemplo a Teoria dos Jogos. A Teoria dos Jogos pode ser definida como a teoria dos modelos matemáticos que estuda a escolha de decisões ótimas sob condições de conflito. Ela foi criada para se modelar fenômenos que podem ser observados quando dois ou mais agentes de decisão interagem entre si. Apesar de ser um campo puro da matemática, ela encontrou inúmeras aplicações, por exemplo, em economia. Inclusive John Nash maior nome da Teoria dos Jogos, ganhou o Prêmio Nobel da Economia em 1994. John Nash não foi o criador da Teoria, ela pode ser encarada como o produto dos estudos de John Von Neumann, ele mesmo foi quem a apresentou a Nash. John Nash deu uma nova cara aos Jogos. Nash se afastou da pesquisa em matemática depois de ter um ataque de esquizofrenia, sua história de vida deu a origem ao livro Uma Mente Brilhante, depois o livro acabou virando filme.

Lorentz estudava massas de ar modelando-as através de um programa de computador, quando resolveu modificar um número nos seus modelos, isso em algumas poucas casas decimais, achando que isso traria poucas mudanças no modelo como um todo. Ele ficou impressionado ao perceber que todo o modelo havia sofrido mudanças drásticas depois daquelas mudanças, para Lorentz era como se um bater de asas de borboleta na América causasse um furacão na Ásia. Nascia aí a Teoria do Caos, uma das leis mais importantes do universo. A ideia da Teoria do Caos é que uma pequenina mudança no início de um evento qualquer pode trazer consequências enormes e absolutamente desconhecidas no futuro.

A Teoria do Caos tonou-se um forte campo de pesquisa matemática, o mais interessante foi quando Bernoit Mandelbrot viu que havia semelhanças entre as equações de Lorentz e a geometria Fractal, descoberta sua, a geometria fractal busca interpretar de melhor forma a geometria da natureza. Muitos cientistas notaram que as equações de Lorentz não só apareciam em massa de ar, mas também em vários outros fenômenos da natureza. Parecia que o caos do universo podia ser enfim compreendido.

Muitos outros desenvolvimentos também se deram em Análise, como Teoria dos números, e diversas áreas como Topologia e Álgebra Linear. A modelagem matemática encontrou na física matemática sua fonte de pesquisa. E como disse Stephen Hawking: a matemática é única linguagem que temos em comum com a natureza. É quase impossível falar em matemática pura sem falar em matemática aplicada. Nesse século e no século passado a matemática consolidou sua posição de instrumento indispensável para a compreensão da natureza, por outro lado os matemáticos viram-na ressurgir com toda uma área de pesquisa nova, como ciência pura que é.

Nicolas Bourbaki é umas das figuras mais inusitadas do cenário moderno. Historicamente Bourbaki foi um militar, lutando junto com Napoleão, sendo que sua campanha foi de muita valia para França, levando em consideração o fato de que lhe foi oferecido o trono da Grécia. O Nicolas que falamos teve uma importância extrema para o desenvolvimento da matemática e também sistematização do ensino. Com um domínio extremo de praticamente todos os campos da matemática, Nicolas Bourbaki tem inúmeras publicações que vão desde a análise até a geometria diferencial.

Na verdade Nicolas Bourbaki não existe! Ao final da segunda guerra mundial muitos países da Europa se virão na difícil situação de retomar suas atividades normais. Para a matemática a situação era semelhante, os centros de pesquisa europeus haviam se transferidos para a América, e muitos matemáticos importantes se afastaram de vez de seus estudos. Sendo assim um grupo de matemáticos francês, recém-formados da école Normale Supéreure de Paris encarregados de ensinar nas diversas universidades francesas passou a discutir a validade dos textos antigos. Nos dizeres de Henry Cartan um dos integrantes desse grupo: “ somos a primeira geração pós-guerra. Há uma lacuna antes de nós. Temos que começar tudo de novo.” O grupo de amigos resolveu então refazer o livro texto de E. Goursat, utilizados nos cursos de Cálculo. Após algumas discursões resolveram então modificar todo o livro sem acrescentar nada de novo, mas estabelecendo uma melhor didática de apresentação. Muitos dos membros permaneceram unidos e em atividade durante toda a sua vida, e sua contribuição ultrapassou de longe sua proposta inicial. O curioso é que o grupo passou a escrever sob o pseudônimo de Nicolas Bourbaki, sendo que nome Bourbaki foi escolha de André Weil, um dos líderes do grupo, enquanto o segundo nome foi sugestão de sua esposa. Como os integrantes participavam do meio acadêmico francês o grupo sempre recebia novos integrantes, provenientes de várias universidades. Para que um matemático continuasse no grupo era necessário além de um talento raro para essa ciência, mas que também mostrasse interesse e participasse das discussões que havia entre os integrantes.

Muito tempo se passou até que fossem descobertos os nomes dos integrantes do grupo Bourbaki. O grupo Bourbaki acreditava que a antigas divisões da matemática não mais deveriam ser consideradas válidas e resolveram propor uma nova divisão. Todo o que o grupo produzia era de extrema qualidade técnica, pois cada resultado era discutido por todos sendo publicado apenas quando tinha a aprovação de todos. Num consenso eles resolveram que o estudo sistemático dessa da ciência matemática deveria começar com Teoria dos Conjuntos, isso se reflete até hoje no ensino, sendo que muitos dos livros do primeiro ano do ensino médio começam com conjuntos. Foi a partir de Bourbaki que se inicia o modelo de estudo sistemático da axiomática, sendo que seus livros eram bastante rigorosos.

Nicolas Bourbaki foi o introdutor de muitas notações como os símbolos N, Z, Q, R e C para representar os conjuntos numéricos. Seus livros são referência mundial em termos de técnica, e foram muito bem aceitos pela comunidade matemática da época. Mas apesar disso foi em 1985 sua última publicação, o grupo passou a se envolver em problemas com as editoras sobre direito de publicar seus livros e acabou se dissolvendo. Uma coisa curiosa nessa história é o grupo acabou dando características humanas a Nicolas sendo que comemorou junto com seus amigos e familiares o casamento de sua filha. Isso abre uma brecha na história da matemática: quantos colossos matemáticos não foram na verdade grupos semelhantes ao grupo Bourbaki?

O século XX foi bastante turbulento, se ao mesmo tempo em que havia um desenvolvimento bastante acentuado em todos os ramos do conhecimento humano, também houve as duas grandes guerras, ao passo que no final do século sentia-se o medo de uma trágica guerra nuclear. Todo esse progresso põe em cheque a matemática, pois a mesma matemática que explica o caos do universo é utilizada na fabricação de armas, e a economia que se utiliza tão bem de modelos matemáticos é grande opressora das massas, cabendo a poucas pessoas os seus frutos. Fica uma pergunta: vale a pena todo o desenvolvimento impulsionado pela ciência no geral, se na verdade uma parcela pequena da população é que na verdade se beneficia com isso?

O século XXI inicia a era mais ambígua da história, se por um lado existe a nanotecnologia e a internet, que mostram a que ponto ser humano evoluiu, um quarto da população mundial vive na miséria. Até que ponto valeu a pena esse desenvolvimento, se o planeta sofre, e toda a humanidade começa a sentir as consequência do consumo degenerado das reservas naturais e da poluição. A matemática linda das pesquisas e das aplicações é também a matemática utilizada para controlar a humanidade pelo sistema capitalista. Esse século traz além da necessidade de mais pesquisa, a necessidade de se resolver a pergunta: “Para que tudo isso?”. Pondo a humanidade numa situação de se avaliar, pois caso não aconteça, sofrerá a pena de extinguir-se.

A ciência é peça fundamental na vida do ser humano, mas vale salientar que é através dela que o ser humano é escravizado, e que o sentido da vida passou a uma esfera mais técnica: manter o sistema funcionando. A matemática é o veículo que impulsiona o desenvolvimento dessa ciência que ao mesmo tempo em que é útil nos aprisiona.

Muitos matemáticos do século XIX achavam que a matemática estava em seus últimos momentos. Jugavam eles que tudo que havia de ser descoberto já o havia sido. Isso era só não um pensamento puramente matemático, mas em, toda a ciência como um todo. No final do século XIX um William Thompson, grande físico, chegou a dizer que em física quase tudo já havia sido explicado, exceto dois pontos. Vale salientar que esses dois detalhes a que Thompson se referia deram origem Mecânica Quântica e Teoria da Relatividade. O século XX mostrou que todos eles estavam enganados, havia muita coisa a se estudar e a matemática estava mais produtiva do que nunca.

Matemáticos do XX pensavam que tudo podia ser compreendido pela mente humana. Mas foi provado o contrário: existem coisas que nos fogem ao alcance. E nesse despontar de século muitos estudiosos acham que a matemática se transformou num monstro, que acabará a destruir a si mesmo. Ressurge a ideia Platônica de mundo, e inundado de Mecânica Quântica o mundo começa a questionar até a existência. Curioso, para Descartes, questionar e existir eram coisas que mutuamente se implicavam: “penso logo existo”, a ciência duvida dessa incontestável razão. Outra tenência da matemática atual é forte especialização, praticamente não existem matemáticos universais, mas apenas técnicos específicos que dominam um instrumento qualquer da matemática. Isso devido ao grande avanço e grande quantidade de conhecimento de matemático atualmente.

Mas afinal o que se espera da matemática? O ressurgimento da geometria, mas com outras vestes, a análise começa a se encaixar na Ciência com um papel semelhante ao Cálculo, e a modelagem matemática é ainda mais útil, encontrando aplicações em todos os ramos do conhecimento: as equações diferenciais estão pro toda parte, no crescimento da população até os batimentos cardíacos. E o que se espera mais da matemática nesse século são suas aplicações á informática. “A inteligência artificial está por aí”.

Capítulo II

**Conjuntos: Um Estudo dos**

**Fundamentos da Matemática**

*Um conjunto é uma coleção de objetos.* Tomando essa como uma primeira definição de conjunto, um ponto a ser notado é que apesar de clara é imprecisa, pois dela surge a pergunta: o que é uma coleção? Na verdade coleção e conjunto têm sentidos muitos próximos, ou seja, a definição anterior só afirma que um conjunto é um conjunto. Mas o termo coleção tem duas particularidades interessantes: a primeira se refere à ideia de agrupamento de objetos de alguma natureza em um “lugar determinado”, vale ressaltar que quando se fala em objetos de alguma natureza não é descartada a possibilidade de se ter objetos abstratos (objetos ditos abstratos podem ser encarados como objetos que não apresentam uma existência física. Isso não é uma definição formal, apenas um ponto de vista adotado pelo autor), nesse caso não faz sentido mencionar agrupamento num lugar determinado; e a segunda se refere a alguma semelhança que esses objetos por ventura apresentem. Muitos objetos que se encontram distantes fisicamente um dos outros fazem parte de um mesmo conjunto.

Até esse ponto um conjunto pode ser encarado como um agrupamento de objetos que apresentem alguma semelhança, propriedade, ou qualquer outra coisa em comum. O leitor deve ter notado que definir conjunto, apesar de ser uma ideia já presente na mente e no cotidiano das pessoas, é uma tarefa delicada. O conceito de conjunto é um conceito primitivo, não carece de definição. O que acontece é que como forma de reforçar essa vista intuitiva do que é um conjunto recorre-se às analogias com coleções. Para a axiomática dos conjuntos nem toda coleção é um conjunto, isso é um detalhe que será evitado nessa primeira abordagem. Um objeto que faz parte de um conjunto é dito elemento do conjunto. A definição de elemento está intimamente ligada à definição de conjunto, portanto, tomando como base a impossibilidade de se definir um conjunto, tem-se como consequência não se poder definir o que é elemento de um conjunto.

Seja *X* um conjunto e *a* um de seus elementos, escreve-se , caso isso não aconteça escreve-se . O símbolo , se ler “pertence a”. Assim: *a* pertence a *X.* A relação de pertinência junto com a definição de conjunto e elemento são considerados termos primitivos. Na verdade serão a base do estudo que seguirá nesse pequeno tratado sobre terminologia. Nesse ponto podemos fazer uma pequena consideração: o objetivo desse texto não é apresentar a Teoria dos Conjuntos, mas apenas apresentar de uma forma sucinta, e sem deixar de ser consistente, a terminologia básica de conjuntos. Falando em terminologia, pode-se considerar um conjunto que não tem elementos: o vazio. A esse conjunto é dado um símbolo já clássico em matemática (esse símbolo foi adotado pela primeira vez por Nicolas Bourbaki): .

O conjunto vazio é um conjunto especial, apesar de ser um tanto inútil. Axiomaticamente o conjunto vazio surge como uma aplicação trivial de um princípio básico acerca da Teoria dos Conjuntos. Na verdade esse princípio é um dos axiomas em que se sustenta a Teoria dos Conjuntos. A título de curiosidade ele é escrito da seguinte forma



É elegante, mas se faz necessário uma boa dose de Lógica para que seja entendida. A expressão exprime o fato de que em Teoria dos Conjuntos há um axioma que afirma que todo conjunto pode ser definido a partir de uma propriedade única e universal de seus elementos. Assim tomando como início um conjunto base, podemos separá-los em duas partes: dada certa propriedade, um conjunto pode ser divido entre os elementos que tem e os que não tem aquela propriedade dada. O axioma afirma que sempre existe um conjunto que contém os elementos, e unicamente eles, que tem a propriedade definida.

Muitas vezes podemos representamos um conjunto listando todos os seus elementos. Exemplo: *X =* {A, E, I, O, U}*, Y =* {-2, -1, 1, 2}*.* Essa forma de representar conjuntos é conveniente até o ponto em que os conjuntos são pequenos o bastante para que se possa lista todos os seus elementos num tempo hábil. Mas nem sempre isso é possível, por exemplo, listando todas as combinações possíveis de letras do alfabeto latino. Esse conjunto existe, sendo que todas as palavras do português são elementos desse conjunto. Vejamos uma forma de escrever esse conjunto:

*Z =* { *com  uma letra do alfabeto latino*}

Apesar de bastante extensa, e nada clara, essa forma é mais conveniente de escrever do que listar todas as combinações de letras. Seja A o alfabeto latino, *X*1 = {; *x é vogal maiúscula*}. O conjunto *X*1 citado é o mesmo conjunto *X* desse parágrafo, porém escrito de outra forma. Leia *X*1 é conjuntos dos elementos *x* “tais que” *x* pertence ao alfabeto latino e *x* é vogal maiúscula. Para justificar a passagem anterior na definição de *X*1, foi usado Apara representar o conjuntos das letras do alfabeto. A expressão “tais que” vem do “;” depois da relação de pertinência entre *x* eA*.* O ponto e vírgula é lido “tal que”, ou “tais que” dependendo do caso. Pode aparecer também um traço vertical no lugar do ponto e vírgula. Seguindo essa mesma linha de raciocínio, seja Y:

Y = {}

Quando é seguida essa ótica para criar um conjunto qualquer, se faz necessário tomar como base um conjunto fundamental ao qual todos os elementos do conjunto que se quer formar pertencerão. Nesse ponto surge uma ideia importante para a terminologia da Teoria dos Conjuntos, o conceito de um conjunto está contido em outro. Em prática diz-se que um conjunto X está contido em um Conjunto Y, ou equivalentemente, que Y contém X, se todo elemento de X é também elemento de Y. Não se obriga que todos os elementos de Y sejam elementos de X, mas também não se descarta essa possibilidade. Em símbolos:



Observações: X está contido em Y, implica dizer que, para todo *x* elemento de X, tem-se também *x* elemento de Y. O equivalente disso é . Quando isso acontece diz-se que X é subconjunto de Y, ou que X é parte própria de Y (essa denominação só se aplica aos casos em que X não é igual a Y). Como já mencionado, não é descartada a hipótese de que além de , tenha-se também , nesse caso particular a aparece a condição de igualdade de conjuntos X = Y (esse é um outro axioma da teoria dos conjuntos, dito axioma da extensão, que afirma que conjuntos que compartilham os mesmos elementos são iguais). Para se provar que dois conjuntos X e Y são iguais se prova que e . Quando citamos um subconjunto A de um conjunto B, e não é descartada a possibilidade de se ter A = B, escreve-se .

Dado um conjunto elementar U, a partir de U pode-se criar vários outros conjuntos, subconjuntos de U:

X = {}

Aqui se nota que o conjunto U foi dividido em duas partes, os elementos que tem uma propriedade p, e os que não a tem. Esse princípio é básico na construção de conjuntos. Um exemplo disso é construção do conjunto :

{}

Nesse caso específico pode-se não especificar, ou deixar bem claro qual seja o conjunto *U*, pois a propriedade  vai ser sempre falsa para os elementos de quaisquer conjuntos. Isso abre um espaço para construirmos uma nova definição de  assim:



O que não deixa de ser demasiado óbvio para que se possa contestar.

Do conceito de subconjunto surge um raciocínio que se encontra implícito no estudo dos Conjuntos. Dado um conjunto *X*, pode-se imaginar que ele tenha um número razoável de subconjuntos. Exemplo: dado *X* = {0,1} tem-se os conjuntos {0}, {1}, {1,2}, e  como subconjuntos de *X.* Nesse exemplo aparece uma estranheza: como  é subconjunto de *X*? Intuitivamente isso é contraditório, qual seria o sentido de se ter ? Na verdade isso não é uma particularidade do conjunto *X* desse parágrafo, todo e qualquer conjunto tem o conjunto vazio como subconjunto. Antes de ser feita uma prova dessa anomalia matemática, pode-se pensar da seguinte forma: se forem tirados todos os elementos de um conjunto, o que se obtém? Um conjunto vazio, e que nada mais se diga do assunto. A prova de que  para todo conjunto *X* se baseia na definição de subconjunto, e segue uma linha indireta de demonstração. A demonstração é feita por absurdo. Funciona da seguinte forma: para provar que uma afirmação é verdadeira, primeiro supõe-se que ela seja falsa, se isso gerar inconsistências, ou qualquer outra conclusão que fere o raciocínio lógico, então a afirmação é verdadeira. Um exemplo é prova de que existem infinitos números primos. E se passa da seguinte forma. Supondo que existam *n* primos, mesmo que *n* seja absurdamente grande, sempre se conclui que deve existir pelo menos  números primos. Isso é uma inconsistência, pois se afirmou inicialmente que existem *n* primos, ou finitos primos, logo existem infinitos primos. Voltando para a prova de que para todo conjunto *X*. Primeiro para que, dados *X* e *Y* conjuntos tenhamos (foi incluído um novo símbolo, que se lê “não está contido”) [[1]](#footnote-1), tem-se que provar que existe um elemento *x,* tal que e . Vamos supor que, logo haveria em  um elemento *x,* que não é elemento de *X*, mas sabemos que é impossível existir em  tal elemento, somos levados a acreditar que o fato de é verdadeiro. Assim o próprio conjunto vazio tem um subconjunto: o conjunto vazio. Pode-se conjecturar que é possível reunir os subconjuntos do conjunto *X* citado no início do parágrafo em um único conjunto. Esse conjunto seria  = {, {0}, {1}, {1,2}}, outro exemplo, dado Y = {a, b, c}, tem-se o conjunto dos subconjuntos de Y definido por PY = {, {a}, {b}, {c}, {a,b}, {a, c}, {b,c}, Y}. A notação PX e PY foi propositalmente adotada, esse conjunto que contém como elementos os subconjuntos de conjunto dado, tem sua existência garantida por um dos axiomas da Teoria dos conjuntos.

Dado um conjunto *X*, o conjunto , onde se e somente se , é dito conjunto das partes de *X*. A notação  para denotar o conjunto das partes de um conjunto genérico *X* não é a convencional, mais serve para propósitos desse texto. Um símbolo comumente usado seria parecido com P(*X*). Usaremos  por enquanto. Note que {}. Muitas vezes  é representado por { }, mas o detalhe é  ≠ {}, pois {} tem um elemento, enquanto que  não tem elementos. Outro conceito interessante ligado a é saber qual é o seu número de elementos. Denotando o número de elementos de um conjunto *X* genérico por # (*X*), assim o que nos proporemos responder é “qual # ()?”. É óbvio que # () depende de # (X). Para o conjunto X = {0,1}, tem-se # (X) = 2, e # (PX) = 4; e para Y = {a, b, c}, tem-se # (Y) = 3 e # () = 8, além de sabermos que # () = 0 e # () = 1. Claramente todo e qualquer conjunto X com dois elementos tem # (PX) = 4, os conjuntos com 3 elementos tem seu conjunto potência com 8 elementos. Pode-se supor que se # (*X*) = *n*, então # () = 2*n*, pelo que foi visto isso é válido pelo menos para *n ≤ 3.* Esse fato é válido para qualquer conjunto, nos ponhamos a prová-lo:

Seja *X* = {*a1, a2, a3, …. an*} com # (*X*) = *n;* vemos que  tem como elementos , {*a1*}, …, {*an*}, {*a1*, *a2*}, …, {*an-1*, *an*}, …, {*a1, a2, a3, …. an-1*}, …, {*a2, a2, a3, …. an*}, X. Mas # () = 1 (referente a ) + *n* (referente aos {*a1*}, …, {*an*}, que são *n* ao todo) + C*n,2* (devido a {*a1*, *a2*}, …, {*an-1*, *an*}, que são as combinações de X tomadas dois a dois elementos) +...+ C*n,n-1* (por {*a1, a2, a3, …. an-1*}, …, {*a2, a2, a3, …. an*}) + 1 (de X).

# () = 1 + *n* + C*n,2*+... + C*n,n-1*+ 1.

Cabe nesse ponto umas considerações acerca da terminologia e do “...” no centro do lado direto da igualdade: “...” significa que existem outras combinações possíveis e que foram omitidas, as que tem 3 elementos até aquelas com *n – 2* elementos.

# () = 1 + *n* + C*n,2*+... + C*n,n-1*+ 1 = 1 + *n* + C*n,2*+... + C*n,n-2*+ *n*+ 1, isso por que C*n,n-1* = *n.*

Acontece que 1 + *n* + C*n,2*+... + C*n,n-2*+ *n*+ 1 é justamente o desenvolvimento binomial de (1+1)*n.*

Logo: *# (X) = n* implica dizer que # (PX) = (1+1)*n* = *2n.□*

Esse resultado alerta para um detalhe da matemática muito importante, os tópicos são interligados. E muitas vezes encontram-se aplicações não muito óbvias que não se esperava muito de conhecimentos. Para as pessoas que já estudaram probabilidade provavelmente tenham visto alguma aplicações do binômio de Newton, quem já teve contato com o Cálculo o viu por toda a parte. Mas a questão crucial aqui é o uso do binômio para a resolução de um problema em Teoria dos Conjuntos. Além disso, esse resultado nos encaminha em outra análise profunda da Teoria dos Conjuntos, pense assim: sabemos que a função *f* :  definida por cresce muito rápido em relação a *n,*  isso significa que pegando um valor *i* e outro maior *j* e se calcular *f* (*i*)e *f* (*j*)*,* percebe-se que variação *f* (*j*) *– f* (*i*) é muito maior do que *i – j.* Tomando um conjunto *X*, tal que # (X) = *n* para um *n* bem grande tem-se para # (PX) um número muito maior do que *n.* Pode-se, dado um conjunto qualquer X, não importando quão grande que seja # (X), criar o conjunto PX que tem muito mais elementos do que X. Por exemplo, se # (X) = *10* então # (PX) = *1024.* Mas 10 não é o número de elementos de um conjunto “grande”, mas mesmo assim o conjunto das partes desse conjunto tem 1024 elementos. Isso nos fundamentos da Teoria causou há certo tempo uma grande revolução. Pois de certa forma impede que se construa um conjunto que contenha tudo.

Mas para que servem os conjuntos? A resposta para essa pergunta surge quando passamos a operar com esse tipo de objeto matemático. Uma das qualidades das entidades matemáticas é podermos relacioná-las entre si de alguma forma. Uma das maneiras mais naturais é a operacionalizar. Por exemplo, quando nos damos com dois números, podemos, sendo definida qual a operação, obter outro número. Note a exigência, sendo definida uma operação, na realidade se isso não fosse imposto ficaria um ar de “e agora que tenho os objetos o que faço com eles?”. Para uma compreensão melhor do que seria uma operação é necessário introduzir o conceito de função. Mas antes que façamos isso pensemos nas operações entre conjuntos como forma de relacionar um ou mais conjuntos. Uma operação entre conjuntos seria uma espécie de experiência, onde as regras para a execução da experiência já estivessem bem definidas, e o experimentador deve esperar as novidades nos resultados. Feitas essas observações definamos algumas operações entre conjuntos.

Dados dois conjuntos A e B, pode-se criar um conjunto que contenha todos os elementos tanto de A como de B, e além disso que não haja elementos nesse conjunto que não sejam elemento de A ou de B. Esse conjunto é dito conjunto união de A e B. Ou simplesmente união de A e B. Tem sua existência garantida por um axioma da teoria dos Conjuntos: o Axioma da União, que é escrito da seguinte forma



O axioma anterior apenas garante que tomando conjuntos arbitrários *x* podemos criar um conjunto *y* que contenha todos os elementos desses conjuntos. Essa forma de ver a união de conjuntos diverge um pouco da anterior pois não limita o número de conjuntos que podemos unir, isso não é um problema, basta por recorrência, numa sequência finita de conjuntos unirmos dois a dois esses conjuntos, e depois duas a duas as uniões, e assim sucessivamente até que no final tenhamos um conjunto, resultado de todas as uniões. De uma maneira mais simples vamos definir a união entre conjuntos assim: dado um conjunto *U* e *A* e *B* contidos em *U*



Ao se fazer uniões de conjuntos nada impede que se tenha elementos que pertençam ao mesmo tempo a todos os conjuntos que se quer unir. Nesse ponto surge uma ideia: dados dois conjuntos A e B, tomando o conjunto que contenha os elementos de A e de B. Esse é justamente o conjunto interseção de A e B, ou simplesmente a interseção de A e B. Que pode ser definido da seguinte maneira: dado um conjunto *U* e *A* e *B* contidos em *U*



O símbolo  indica a intercessão. O conjunto intercessão não tem um axioma especial que lhe garanta a existência, porém ele surge naturalmente quando se aplica os demais axiomas.

A título de curiosidade um axioma que poderia garantir a existência de conjuntos como o conjunto intercessão seria o Axioma da Escolha. Em termos gerais, o axioma da escolha afirma que dada uma classe finita de conjuntos, pode-se formar um conjunto que contenha pelo menos um elemento de cada um desses conjuntos. Não é exatamente isso que afirma o Axioma da Escolha, mas pode-se pensar nele dessa forma.

Além dessas duas operações podemos definir outra, a diferença: dado um conjunto *U* e *A* e *B* contidos em *U*, A – B pode ser definido da seguinte forma



Além dessas propriedades existem outras, mas para não chatear muito o leitor não as analisaremos nesse primeiro momento. O leitor deve se sentir tentado a perguntar por que as operações anteriormente citadas tornam a Teoria dos Conjuntos útil. O que torna a TC útil são justamente as operações. Pois com base na álgebra de conjuntos é que se constroem inúmeros campos da matemática.

De uma maneira simplista, a matemática pode ser encarada como o estudo dos números e das formas. De uns temos para cá, se encaixa também nessa definição o estudo das estruturas algébricas. Mas como já foi mencionado, nada adianta para a matemática, termos objetos se não podemos relacioná-los de alguma maneira. É através das funções que isso se dar. Façamos então o estudo desses importantes objetos matemáticos.

A noção de par já vem explicitada na Teoria Axiomática dos Conjuntos. Um axioma garante que dados dois conjuntos A e B, pode-se montar o conjunto P = {A, B}. Isso abre um espaço para a ideia intuitiva de par ordenado. Note que de P = {A, B}, não há algo que indique que {A, B} ≠ {B, A}, inclusive tomando como base o que já foi dito pode-se mostrar que isso é falso. Mas há ocasiões em que é necessário e até evidente ter {A, B} ≠ {B, A}. Aqui deve ser esclarecido que a simbologia, se não incorreta, é pelo menos mal escrita. Há pares em que existe um primeiro e um segundo elemento. Teria uma simbologia semelhante a (A, B), que é justamente a indicação de que isso é um conjunto, porém que seus elementos são ordenados. A propriedade básica dos pares é a igualdade:

(A, B) = (*x*, *y*) A = *x* e B = y

Aqui pode ser notado que (A, B) = (B, A) se e só se A = B. Em termos de conjuntos, um par ordenado (a, b) poderia ser escrito da seguinte forma:

(a, b) = {{a}, {a, b}}.

É uma ideia um tanto confusa e imprecisa, mas justifica muito bem a definição de igualdade entre pares. Observe:

(a, b) = (*x*, y) {{a}, {a, b}} = {{*x*}, {*x*, *y*}}

o que resultaria em se ter {a} = {*x*} e como consequência disso: {a, b} = {*x*, *y*} b = *y.*

O leitor tem dois caminhos ao pensar sobre esse jeito de ver os pares ordenados: primeiro, aceita-o e o esquece, afinal essa ideia sobre par ordenado não serve em sentido prático; ou segundo, o rejeita e esquece-o. Apesar dos esforços, nada de melhor foi feito para escrever um par ordenado na terminologia própria dos conjuntos. Além disso, essa definição carrega em si um traço de quem seria o primeiro elemento e de quem seria o segundo. Veja: (a, b) = {{a}, {a, b}}.

Nada impede que se tenha triplas ordenadas (a, b, c). Em um estudo mais avançado em matemática o leitor é levado a estudar n-uplas ordenadas (a1, a2, a3, …, an). Aqui pode ser observada a inconveniência de escrevermos as n-uplas ordenadas na nomenclatura de conjuntos, quando n ≥ 3.

(a, b, c) = {{a},{a, b},{a, b, c}}

(a, b, c, d) = {{a}, {a, b}, {a, b, c}, {a, b, c, d}}

E isso só piora à medida que n aumenta. Um ponto curioso seria como escreveríamos as n-uplas ordenadas com suas coordenadas idênticas:

(a, a) = {{a}, {a,a}} = {{a},{a}} = {{a}}

(a, a, a) = {{a},{a,a},{a,a,a}} = {{a}}



(a1,a2,a3,…, an, ...) = {{a}}.

Isso é no mínimo estranho, mas deixemos de lado essa notação, e sigamos em frente em nosso estudo.

Estendendo o conceito de par ordenado vem a definição de produto cartesiano. Dados dois conjuntos A e B, o produto cartesiano (A cartesiano B) é definido da seguinte forma:

= {(a, b); e }

não é difícil perceber que se # (A) = *m* e # (B) = *n*, #= *mn*. Do fato nem sempre se ter (a, b) = (b, a), tem-se na maioria dos casos. Ocorre , se A = B, nesse caso escrevemos como A². Definamos também :

= {(a, b, c); } .

Não será novidade se escrevermos A³ quando A = B = C. Definições semelhantes se aplicam aos casos de n-uplas ordenadas. Note que um produto cartesiano é um conjunto, onde seus elementos são pares ordenados, isso no caso de se ter apenas dois conjuntos no produto.

A partir de agora consideraremos apenas os produtos cartesianos de dois conjuntos. Isso simplificará o estudo, e permitirá que mais à frente estendamos os resultados para as demais n-uplas.

Uma relação é um subconjunto qualquer de um produto cartesiano. Exemplo: seja o produto , onde A é conjunto dos números reais positivos, e B é o conjunto das figuras geométricas planas. Note que é absurdamente grande. Pensemos no subconjunto de pares (a, b) onde a é a área de b, esse subconjunto é uma relação. Qualquer subconjunto de um produto cartesiano é uma relação.

Os pares de uma relação têm suas coordenadas relacionadas entre si de alguma forma. É a partir daí que surge o conceito de função. Uma função é um tipo especial de relação e consequentemente, uma função é um subconjunto de um produto cartesiano. Parece até sem graça vermos a função dessa forma, afinal um subconjunto de um par ordenado é tão especial quanto o próprio produto. Vejamos uma função de outra maneira.

Sejam dados dois conjuntos A e B, uma função de A em B é uma regra que associa a cada elemento de A um único elemento em B. Ela é denotada por



Note que essa regra associa um elemento *x* em A a um elemento em B, que será representado por , indicando que é o resultado da aplicação da regra em *x*, isso em símbolo fica



O Conjunto A é denominado domínio da função e o conjunto B é o contradomínio.

Por essa definição de função vemos que para qualquer *x* em A, temos um único *y* em B, tal que *f* (*x*) = *y.* Assim não se pode ter *y1 ≠ y2* tais que *f* (*x*) = *y1* e *f* (*x*) = *y2.* O subconjunto de B formado por todos os *y* tais que *y = f* (*x*), para algum *x,* é chamado de conjunto imagem da função. Nada impede que o conjunto imagem, seja igual a todo o domínio, ou que a imagem tenha um só elemento. Mas numa função nunca admite um conjunto imagem vazia.

Seja  uma função, nada impede que hajam *x1* e *x2* em A, onde *x1 ≠* *x2* e *f* (*x2*) = *f* (*x1*). Isso continuaria valendo inclusive se para todo *x, f* (*x*) = *a*, ou seja todos os elementos do domínio tivessem como imagem um único elemento do domínio (eis o caso onde o conjunto imagem consta de um único elemento). As funções onde o conjunto imagem é igual ao domínio são chamadas de sobrejetoras ou sobrejetivas, e aquelas onde elementos distintos do domínio admitem imagens distintas no contradomínio, são chamadas de injetoras ou injetivas. Vejamos essa duas importantes definições em sistematicamente, como forma de esclarecer esse conceito:

Seja uma função, *f* é sobrejetiva ou sobrejetora, se para todo *yi ,* tenha-se *xi* A, tal que *f* (*xi*) = *yi.*

Seja  uma função, *f* é injetiva ou injetora, quando  implica dizer que .

Uma função injetiva e sobrejetiva é chamada de função bijetiva, ou bijetora. As bijeções são comumente denominadas correspondências biunívocas.

Certa vez ouvi um famoso professor de matemática afirmar que, ao escrever um texto, e definir um tipo qualquer de objeto matemático, o escritor tinha por obrigação dá pelo menos um exemplo que se enquadra naquela definição. Aprovo, e tento ao máximo seguir a risca essa forma de ver como deve ser escrito um livro de matemática, mas para o leitor dessas notas deve ficar claro que o objetivo máximo desse texto é o de exercitar. Como um dos exercícios que surgem à medida que se vai lendo o que escrevi, sugiro que o leitor busque criar certos tipos de funções.Mas uma coisa deve ser frisada: as funções não são necessariamente relações entre conjuntos de objetos matemáticos (tente lembrar de alguns exemplos de funções em matemática), mas também pode-se ter funções entre conjunto dos mais variados, um exemplo disso, imagine o conjunto de todos subjetivos da língua portuguesa e o alfabeto latino, a relação que associa a cada subjetivo a sua letra inicial é um função (por que? É sobrejetora ou injetora?).

De posse de tudo que foi dito pode-se perguntar se existe alguma maneira de relacionar funções e se obter novas funções. A resposta é muito simples: depende. A maneira de relacionar funções é através da composição de funções. Em termos gerais, dadas duas funções *f* e *g*, podemos cria com ambas a função *h.* Pensemos nas funções e , sendo assim imaginemos a função , que é definida da seguinte forma: , foi uma composição das *f* e *g* em uma única função *h*, essa composição só faz sentido se o contradomínio de *f* for igual ao domínio de *g*, e mais exatamente que a imagem de *f* seja igual ao domínio de *g.* De outra maneira é impossível falar em *h* como sendo um função. Assim pode ser construída uma definição para a composição de funções.

Dadas as funções , sobrejetiva; e , define-se a função  (leia *g* composta *f*), como sendo a função , que associa *x* a *g* (*f* (*x*)).

Capítulo III

**Teoria Ingênua dos Conjuntos**

*“Um conjunto é uma coleção considerada como um todo de objetos distintos e definidos da nossa intuição ou pensamento. Os objetos são chamados elemento do conjunto.”*

George Cantor

O que torna a *Teoria dos Conjuntos* de Cantor (TC) importante para a matemática como um todo é o fato de que muitas dos objetos estudados por ela podem ser encaradas como conjuntos. Dessa forma a linguagem da *Teoria dos Conjuntos*, encontrando aplicabilidade em quase toda a matemática, é quase uma “linguagem universal”. Assim, definições, conceitos, axiomas, os teoremas e suas demonstrações, etc., podem ser exprimidos em termos da Teoria dos Conjuntos. A TC desde sua criação no século XIX se encontra em um lugar privilegiado, como base em que se assenta o conhecimento matemático, e consequentemente o conhecimento científico em geral.

A TC nasce quando Cantor tentava solucionar o problema da caracterização de conjuntos unicidade de séries trigonométricas (o leitor pode encontrar algumas noções de séries no final do texto). Um subconjunto X de [0, 2π] é dito conjunto de unicidade quando, se a série trigonométrica convergir para zero nos pontos fora de X, então os coeficientes se anulam. O primeiro resultado de cantor nesse assunto foi que o conjunto vazio é um conjunto de unicidade. Assim a única série trigonométrica que converge para zero em toda a parte de [0, 2π] é aquela cujos coeficientes são todos nulos. Cantor é levado a introduzir uma notação que explique e exemplifique os seus resultados: a *Teoria dos Conjuntos.*

Para Cantor toda coleção é um conjunto[[2]](#footnote-2). Não existem restrições à construção, e a que tipos de objetos possam de fato vir a ser elementos de um conjunto. Essa concepção encontrou muitos oposicionistas no sentido de que a partir dela surgem vários paradoxos, isso acaba por prejudicar sua posição como fundamento da matemática. O próprio Cantor notou a existências desses paradoxos. O primeiro descoberto por Cantor envolve um conceito interessante: cardinalidade. Pode-se, em termos informais, afirmar que a cardinalidade de um conjunto é dada por seu “tamanho”, dessa forma o *conjunto universal* (como concebia Cantor: o conjunto de todos os conjuntos) deve ter a cardinalidade maior possível. Um conjunto X pode ter todos os seus elementos também elementos de outro conjunto Y, assim se diz que X é subconjunto de Y (em símbolos: , *X está contido em Y*); existe um conjunto Z que contém todos os subconjuntos de um conjunto qualquer Y, Z é chamado conjuntos das partes de Y ou conjunto potência de Y, Z é denotado por P(Y)[[3]](#footnote-3). Cantor provou que para qualquer conjunto X, a cardinalidade de P(X) é maior que a cardinalidade de X. Sendo assim o que dizer da cardinalidade do conjunto das partes do *conjunto universal*? O *conjunto universal* não é o maior conjunto?

Outra situação desagradável a que se coloca a concepção cantoriana dos conjuntos é a de impossibilidade da existência do *conjunto universal*. Ela se baseia no seguinte argumento: seja dado um conjunto, podemos caracterizá-lo a partir de uma propriedade única e universal de seus elementos[[4]](#footnote-4) (detalhe, quando *x* é elemento de um conjunto *X*, denota-se). Dados dois conjuntos *A* e *B*, vamos supor que *A* seja o *conjunto universal*, denotemo-lo por *U*; e que seja *B* o conjunto onde todos os seus elementos não são elementos de si mesmo (espera-se que os elementos de *B* sejam conjuntos, isso não é problema, pois para Cantor não há restrições a construção de Conjuntos; portanto teríamos conjuntos que são elementos de outros conjuntos, e provavelmente conjuntos que são elementos de si mesmo). Podemos escrever *B* da seguinte forma:



que se lê: B é conjunto dos elementos *x* tais que *x* não é elemento de (ou não pertence a) *x*. Detalhe: inclusão de um novo símbolo pra a não pertinência - , também representado por .

A chave do paradoxo se encontra na pergunta *B U*? A intuição afirma que sim, porém a resposta é não. Apesar de *U* ser o *conjunto universal* de Cantor não conteria todos os conjuntos: contradição. Pela definição de *U* teríamos todo *x* de *B*, pertencente a U e, portanto, o conjunto que na verdade não é subconjunto de *U* é {*B*}. Sendo assim é impossível se construir o conjunto de todos os conjuntos, ou em termos informais: “Nada contém tudo, não existe universo!”. Justifica-se o fato de *B* não ser elemento de *U* da seguinte forma: se *B U*, então ou  ou  (note o “ou” exclusivo, uma e somente uma das hipóteses pode ser verdadeira). Se , então B não é elemento de B ou ; contradição, a afirmação de que  é falsa. Então só nos resta afirmar que ; mas se , então B é elemento de si mesmo ou , o que acaba nos conduzindo a outra contradição. Como a suposição de que *B* seja elemento de *U* sempre conduz a uma contradição, somos levados a acreditar que essa suposição é falsa□. Foi o próprio Cantor quem notou a impossibilidade de se construir o *conjunto universal*. Esse paradoxo também é conhecido como paradoxo de Russel.

Os paradoxos surgem quando tomando como base um sistema lógico e os postulados aceitos de uma teoria, se chega às conclusões φ e ~φ, ou φ ­­­↔ ~φ, onde φ é uma afirmação qualquer e ~φ é sua negação (é comum também se representar ~φ por φ). A proposição φ e ~φ afirma que φ é tanto falsa quanto verdadeira, o que contradiz o princípio do terceiro excluído da lógica clássica que diz que uma proposição ou é verdadeira ou é falsa (proposição é uma frase que pode ser caracterizado como verdadeira ou falsa). Enquanto que a proposição φ ­­­↔ ~φ afirma que a veracidade de φ faz com que ela seja falsa, e sua falsidade tem como consequência a comprovação de sua veracidade. Para a lógica de primeira ordem clássica como φ é uma proposição, pois φ é uma afirmação e como tal ou pode ser falsa, ou pode ser verdadeira. Utiliza-se em lógica conectivos para formar novas proposições a partir de posições menores, aqui se nota a utilização de dois desses conectivos o “e” e o “↔”, portanto “φ e ~φ” e “φ ↔ ~φ” são proposições e que independentemente do valor lógico de φ são sempre falsas.

O primeiro paradoxo de Cantor, não necessariamente atingia os alicerces da *Teoria dos Conjuntos*, pois envolve conceitos de um segundo estágio da TC (a Teoria dos Números Transfinitos). Essa mesma situação não encontra o paradoxo de Russell, devido ao fato do mesmo envolver ideias iniciais da TC (note que os termos do paradoxo envolvem apenas a definição de conjunto), ou seja, a sua origem não é consistente, e, portanto toda ela segue por trilhas ilógicas.

Uma teoria se constrói em matemática seguindo mais ou menos os seguintes passos: primeiro tem-se os objetos que a teoria estuda, cada um apresenta uma definição, que é em muitos casos, pouco ou nada satisfatória, é o caso da *Teoria dos Conjuntos,* onde os objetos são os conjuntos e seus elementos, e pela definição de Cantor conjunto é uma coleção (e coleção o que é? Um conjunto. Por fim...), além da definição de elemento (objeto que faz parte do conjunto); em um segundo passo se faz algumas afirmações alto-evidentes, mas que não podem ser provadas: os axiomas. Os axiomas não podem ser provados, porém sua veracidade é verificada comparando-os entre si, e vendo se deles não resulta alguma coisa que não faz sentido, são leis válidas (uma vez ou outra um matemático simplesmente nega um ou mais axiomas, e constrói a partir daí outra teoria totalmente diferente da original, e eventualmente: útil); em um terceiro passo temos os teoremas, que são afirmações que podem ser provadas tomando como base as definições e axiomas; em um quarto e último passo se tem as aplicações dessa teoria, seja em matemática, ou mesmo em áreas da ciência. Quando os axiomas não levam a paradoxos diz-se que a teoria é consistente, ou os axiomas são consistentes, etc., pelo que foi dito a *Teoria dos Conjuntos* de Cantor não é consistente.

Ao se analisar a teoria que Cantor construiu nota-se que apesar dessa sua “fraqueza” em termos de formalidade, ela é uma verdadeira obra prima da matemática. Mesmo ela já é suficiente pra um estudo amplo da matemática. Termos da álgebra e da topologia, por exemplo, se constroem a partir da teoria ingênua dos conjuntos, sem falar que praticamente todas as aplicações de *Teoria dos Conjuntos* na ciência em geral se darem a partir de sua forma ingênua. Inclusive a parte de conjuntos vistas comumente no ensino secundário é ingênua. Mas na verdade essa grande aplicabilidade não implica em não poder se encontrar situações em que ela não se aplique. Os paradoxos já nos mostraram isso. Por essa e outras a Teoria dos conjuntos de Cantor foi reformulada, e muitos matemáticos estiveram envolvidos nesse processo.

Cantor foi um desbravador, era de se esperar que o que ele construiu não estivesse em plena perfeição. Mesmo hoje Teoria dos Conjuntos ainda é uma área bastante dinâmica da matemática, e todas as suas mudanças, como maneira de encontrar uma estrutura ótima a qual possa se assentar, foram consequências dos avanços que houve tanto nela mesma como em sua ferramenta principal: a lógica. Um desses avanços foi a teoria dos conjuntos construída a partir da teoria dos tipos de Russell, e da axiomática de Ernest Zermelo acrescida de alguns coisas extras. Antes de darmos continuidade nos estudos falemos de alguns resultados a que chegou Cantor a partir de seus estudos.

Como já foi mencionado: a cardinalidade é uma forma de “medir o tamanho” de um conjunto. Quando apenas estão envolvidos conjuntos com uma quantidade finita de elementos (não estamos dando um limite ao número de elementos do conjunto em questão, apenas se indica que ele deva ter um número finito de elementos), a cardinalidade do conjunto se confunde com o número de elementos que o mesmo tenha, nesse caso a cardinalidade é representada por um número natural, um exemplo, pouco claro, porém útil desse fato é conjunto dos divisores naturais de um número. Porém no caso de conjuntos infinitos essa situação toma direções bem estranhas. O conceito de infinito estava enraizado na matemática como a ideia de vazio: um conceito único, ou seja, duas coleções diferentes, mas ambas infinitas teriam, por fim, um mesmo infinito de elementos. Intuitivamente parece-nos bastante plausível aceitar essa afirmação. Uma das descobertas mais notáveis de Cantor foi que nem sempre a situação mencionada acima acerca de conjuntos infinitos acontece, em verdade, existem diferentes tipos de infinito, inclusive uns maiores que outros, e para ser mais exato, uma coleção infinita de diferentes infinitos. O curioso é o fato de que o mesmo não acontece ao conjunto vazio, ele é único (pelo menos isso), vale salientar que tecnicamente o conjunto vazio é subconjunto de todo e qualquer conjunto.

Dados A e B conjuntos quaisquer, dizemos que ambos são equipotentes se pode-se associar a cada elemento de A um único elemento de B, por exemplo em dois conjuntos finitos de mesma cardinalidade (a saber, mesmo número de elementos), é possível fazer essa associação apenas “ligando” um elemento de A a um elemento B, notando sempre que elementos distintos em A tenham “ligações” distintas em B. Quando acontece de dois conjuntos serem equipotentes, se diz que eles podem ser colocados em correspondência biunívoca. Note que conjuntos finitos equipotentes têm a mesma cardinalidade, esse fato pode ser estendido para conjuntos infinitos; temos assim o seguinte axioma:

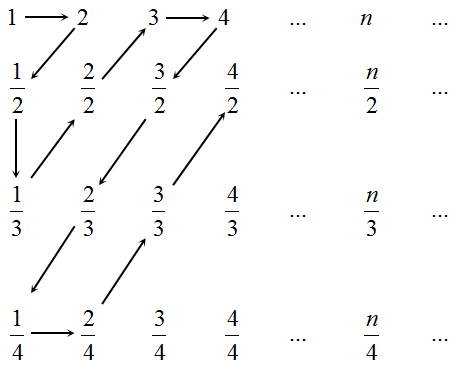
A.1 *Conjuntos infinitos equipotentes tem a mesma cardinalidade.*

Cantor notou que os números naturais e os números pares eram equipolentes, portanto de mesma cardinalidade. E não apenas os números pares, mas também outros subconjuntos infinitos (especificamente todos), dos naturais eram equipolentes entre si e equipolentes a . Daí surge a definição: *conjunto infinito é aquele que é equipotente a alguma de suas partes próprias* (parte própria de conjunto X, é um subconjunto qualquer de X e que não é igual a X). Essa definição deve completar A.1, mas não a deixa menos obscura.

Quando um conjunto podia ser colocado em correspondência biunívoca com Cantor dizia que esse conjunto era enumerável. O infinito enumerável é na verdade a primeira classe de infinito, foi associado a ele o símbolo, que representa o cardinal de todos os conjuntos enumeráveis (, alef, letra do alfabeto hebreu). Além disso, se prova que o conjunto dos números racionais é enumerável. Ou seja, os números da forma p/q com p e q inteiros e q diferente de zero pode ser colocado em correspondência biunívoca com os naturais. Quando se pensa nisso a partir da reta real notamos o quanto é sofisticada essa afirmação, os números naturais estão dispersos na reta, enquanto que os números racionais são densos sobre a reta (isso quer dizer que independentes de quão próximos estejam dois números racionais um do outro, sempre existe um número racional entre eles), o que se diz é que o conjunto dos números naturais tem o mesmo tamanho do conjunto dos números racionais.

Para provar que um conjunto é enumerável basta que possamos organizar seus elementos de maneira tal que exista um primeiro elemento, um segundo elemento, um terceiro elemento, etc., pois dessa forma se tem uma correspondência entre tal conjunto e o conjunto dos números naturais, onde cada elemento do conjunto se associa com um e só um elemento de . Esse raciocínio é utilizado para provar que o conjunto dos números inteiros é enumerável, ponhamos = {..., -n, ..., -2, -1, 0, 1, 2, ..., n, ...} da seguinte forma, = {0, 1, -1, 2, -2, ..., n, -n, ...}, assim claramente fica com seus elementos seguindo em uma certa ordem, com primeiro elemento, segundo elemento, ..., n-enésimo elemento. Um raciocínio semelhante se usa para provar que conjunto dos números racionais é enumerável, ele segue o seguinte caminho.

Considere a formação:



é claro que todo e qualquer racional positivo aparece pelo menos uma vez nesse sistema. Omitindo algumas repetições, e seguindo o sentido das setas podemos ordenar os números da formação da seguinte forma:

1, 2, 1/2, 1/3, 3, 4, 3/2, 2/3,1/4, ...

que são justamente todos os racionais positivos postos em uma ordem enumerável. Por um caminho semelhante ao tomado para provar que é enumerável, podemos provar que também o é

= {0, 1, -1, 2, -2, 1/2, -1/2, 3, -3, 4, -4, ...},

e a matemática nunca mais foi a mesma.

Foi visto que , e são enumeráveis, só resta afirma que todo conjunto numérico é enumerável, e assim os números irracionais e seriam ambos enumeráveis. Antes de iniciarmos essa parte do trabalho foi mencionado que existem infinitas formas de infinito, mas até agora só apareceu uma; o infinito enumerável. Justificando o que foi dito saibamos que Cantor provou que nem os números irracionais nem são enumeráveis.

Antes de falarmos do fato da não enumerabilidade dos irracionais (como não existe símbolo para o conjunto dos irracionais, usaremos a convenção matemática de denotar esse conjunto por e de vamos seguir a trilha de Cantor para chegar a esse ponto. Vejamos, seria o conjunto (0, 1) enumerável? Note que a pergunta faz menção a um pequeno intervalo da reta real, a resposta dada por Cantor foi não, isso seria contraditório, estamos supondo que o “pequeno conjunto” (0, 1) é maior que . Mas graças a Pitágoras sabemos que além dos racionais existem os irracionais. Admitindo a resposta de Cantor para a enumerabilidade de (0, 1), só podemos chegar a uma conclusão: e não são enumeráveis. Façamos uma pausa para provar o resultado de Cantor.

Supondo que (0, 1) seja enumerável, então se poderia organizar os elementos desse conjunto seguindo uma ordem bem definida, e todos números pertencentes ao intervalo apareceriam nessa organização. Sabe-se que todo e qualquer número real pode ser escrito como uma dízima infinita, em alguns casos pode ocorrer de um número admitir duas dessas formas de dízima infinita, por exemplo, a estranha (porém provável) situação de que 3 pode ser escrito como 3,00000... ou 2,99999..., nesse casos apenas escolhemos um delas e esqueçamos da outra. Seguindo esse passo criemos a lista ordenada dos elemento de (0, 1):

1° elemento: p1 = 0,a11a12a13a14a15a16 ...

2° elemento: p2 = 0,a21a22a23a24a25a26 ...

3° elemento: p3 = 0,a31a32a33a34a35a36 ...

etc.

seguindo poderíamos escrever todo e qualquer número real vale ressaltar que cada aij representa um número entre 0 e 9. Tomemos o seguinte número b = 0,b1b2b3b4b5 ..., onde se akk é diferente de um número definido p, então bk será igual p, digamos se akk ≠ 5 então bk = 5; e se akk for igual a p, então bk será igual a q, com q diferente de p, exemplo se akk = 5, então b = 7. Note que b nunca será igual a um dos números da nossa lista pois sempre diferenciar-se de algum deles por pelo menos um dígito:

b = 0,b1b2b3b4b5 ... b n ... será sempre diferente de pn = 0,an1an2an3an4a35an6  ... ann ..., pois pela regra para a construção de b temos bn ≠ ann. É claro que b é elemento de (0, 1), mas não faz parte da lista de todos esses elementos, assim não podemos colocar esses elementos em uma lista, pois a firmação de o podemos fazer, nos leva a uma contradição.

Antes de continuarmos falemos um pouco sobre o tipo de prova dado anteriormente. Desde o inicio desse texto vem sendo feitas demonstrações ditas por absurdo, ou em termos gerais redução a absurdo. Eles consistem no seguinte: quando se quer provar que uma afirmação é verdadeira se usa do seguinte caminho, primeiro se admite que sua negação é verdadeira, se a partir dessa negação se chega a uma conclusão impossível em termos matemáticos (absurda por assim dizer), então a negação só pode ser falsa e portanto a firmação que queria-se provar é verdadeira. Esse tipo de demonstração é muito utilizado em Teoria dos Conjuntos, e também na matemática como um todo. Muitos matemáticos são levados a não aceitar tais demonstrações por seu caráter não construtivo, existe inclusive uma escola de filosofia da matemática que defende a ideia da abolição das provas por redução a absurdo (os intuicionismo). Caso isso fosse possível uma parte substancial da matemática seria descartada, para muitos teoremas importantes da matemática só há prova por redução a absurdo.

Do resultado de Cantor para enumerabilidade de (0, 1), podemos tirar uma conclusão: não é enumerável, e portanto tem um cardinal diferente de , e , como esses conjuntos são subconjuntos de somos levados a acreditar que o cardinal de é maior que o cardinal de . Temos assim uma definição bem sútil: *o cardinal de um conjunto A é maior que o cardinal de um conjunto B, quando B é equipotente a uma parte própria de A, mas A não é equipotente a nenhuma parte própria de B.* Não é difícil estender esse resultado e afirmar que o conjunto dos números complexos também não é enumerável. Note que nada foi dito sobre a se o cardinal de (0, 1) é igual ao cardinal de , na verdade já se provou que (0, 1) é equipotente a e portanto ambos o tem o mesmo cardinal. Uma pergunta feita pelo próprio Cantor acerca do fato de existir um cardinal maior do que o cardinal de e menor que o cardinal de , causou no século passado uma verdadeira revolução no conhecimento matemático. Cantor tentou provar que tal cardinal não existia, mas isso estava fora do alcance da matemática da época, e a pergunta ficou em aberto sendo dada a ela uma resposta assustadora por outro gigante da matemática: Kurt Gӧdel, logo adiante falaremos sobre essa pergunta que ficou conhecida como *Hipótese do Contínuo.*

Cantor é de fato um matemático de descobertas notáveis citarei brevemente uma delas. Esse resultado envolvia números irracionais. Estudantes conhecem raros exemplos de números irracionais, é um exemplo de um deles. Intuitivamente somos levados a acreditar que eles são poucos. Em matemática em muitos casos a intuição é uma ferramenta bastante útil, pois é a partir dela que se cogita sobre algum resultado, se for o caso prova-se um teorema. Mas há situações em que a intuição é na verdade uma vilã nesse processo, para relembrar: a natureza do infinito. O caso dos números irracionais é um fato onde a intuição não ajuda muito. Sem mais estender-se a verdade é que existem muito mais números irracionais do que racionais. Mas uma vez os estudos de Cantor assombram nossos conhecimentos prévios de matemática. Na verdade isso é um resultado trivial acerca da enumerabilidade de (0, 1), sabemos que a resposta é que (0, 1) não é enumerável, e tem cardinal maior que . Como é subconjunto de , excluídos tais desse conjunto, nos sobra , vemos que o fato da não enumerabilidade de , resulta da existência dos números irracionais, ou seja também não é enumerável, tem um cardinal maior que o de . As linhas anteriores pecam um pouco, em sentido de formalidade, mas a ideia principal fica mais clara, creio que isso seja o bastante.

Falemos de um último resultado dos trabalhos de Cantor. Comecemos com uma definição:

*definição A Um número complexo é dito algébrico se é raiz de algum polinômio*

*f(x) = a0xn + a1xn-1 + ... + an-1x + an ,*

*onde a0 ≠ 0, e todo ai é um número inteiro.*

É fato que todo número racional é algébrico, pois a equação *ax - b = 0 (sendo a e b números inteiros, com a ≠ 0),* sempre admite solução em . outro fato é que existem números irracionais que são algébricos, a saber que é raiz do polinômio *f(x) = x² - 2.* Cantor provou que o conjunto dos números algébricos é enumerável, ou seja, apesar de conter elementos todos os elementos de e alguns elementos de , não é ele próprio igual a . Assim existem números (obviamente todos irracionais) que não são algébricos. Tais números são chamados de transcendentes. Note que o resultado da existência de números transcendentais, é consequência de uma cadeia de descobertas, a começar com a criação da Teoria dos Conjuntos.

Vejamos a prova da enumerabilidade do conjunto dos números algébricos, antes de falarmos um pouco de suas consequências:

*Tomemos um polinômio na forma dos polinômios da definição A, considerando a altura do polinômio definida da seguinte forma*

*h = n + | a0 |+| a1 | +| a2 | + ... +| an-1 |+| an | .*

*É óbvio que h é inteiro maior ou igual a 1. Pode-se notar que o número de polinômios de uma determinada altura é finito, e, portanto cada polinômio de uma dada altura produziria finitos números algébricos. Dessa forma poderíamos listar os números algébricos segundo uma regra prática: primeiro todos os que são raízes de polinômios de altura 1, segundo as raízes de polinômios altura 2, depois de 3, etc., assim riscando da lista alguma repetição temos um conjunto bem organizado e consequentemente enumerável.*

Há matemáticos que não aceitam a demonstração anterior, pois ela segue uma cadeia de provas indiretas, e, além disso, não dá nenhuma pista da construção de um número transcendente. Felizmente já se tem uma demonstração de que um número bem conhecido e que faz parte da matemática é transcendente, esse número é π. Existem, números transcendentes, isso é uma realidade matemática, só nos caba aceitar.

Correndo o risco de ser mais pedante do que o recomendável eu reafirmo: a Teoria dos Conjuntos se encontra na base da matemática. Listemos alguns exemplos disso:

1 – uma área bastante proeminente da matemática é Álgebra Linear, com aplicações em muitos campos da matemática pura, mas com aplicações também em física, economia, informática, etc.; o crucial é que o objeto central de estudo a da Álgebra Linear são uns *Conjuntos* (isso mesmo: *CONJUNTOS!)* especiais chamados Espaços Vetoriais.

2 – Teoria dos Grupos, um campo bem vasto da Álgebra Abstrata, é extremamente útil a física de partículas, e uma ferramenta indispensável para a matemática como um todo, tem como seus objetos de estudo os Grupos, que são na verdade *Conjuntos.*

3 – Espaço é o *Conjunto* de todos os pontos. E nada mais se diga.

4 – de certa forma a matemática é os estudo dos números e das formas, certo que essa definição de matemática, peca, pois só engloba uma pequena parte do que realmente ela estuda. Na opinião do escritor, que ver nos números o objeto central do conhecimento matemático. Sabe-se que formam conjuntos, e eles próprios são encarados como conjuntos, etc.

*No Princípio eram conjuntos, e Deus disse que seus elementos se relacionem entre si, e deles saia toda linguagem que será utilizada para a construção da matemática. E da matemática farei eu o universo*.

Obs.: se por um motivo ou outro o leitor se sentir meio que insultado pela última frase, desculpe a esse humilde devoto da matemática.

i

**Séries Trigonométricas**

Para se ter uma noção exata do que seja uma série trigonométrica se faz necessário se entender o que é uma sequência.

*1.1 Sequências – Dada uma função f* :→  *definida onde*

*, com an = f(n)*

*o conjunto { a1, a2, a3, ..., an, ...} é denominado sequência, e tem denotação an. Dessa forma tendo f definida com domínio nos números naturais (isso implica a exclusão do zero), e contradomínio no conjunto dos números reais (inclusive zero, apesar do zero não pertencer ao domínio nada impede que o mesmo não pertença a imagem de f, pode se ter até uma sequência onde todo an = 0, para qualquer n natural - a saber* (*0, 0, 0,..., 0, ...*)*. Ou seja, an é real, enquanto que n é natural.*

*1.2 Convergência e Divergência de Sequências – Dada { an } uma sequência. Quando*

*= L ou an → L quando n →*

*diz-se que an é convergente ou converge para L, caso contrário diz-se que an é divergente. É necessário um entendimento sútil de limites para que essa definição fique clara, note que o que se diz é que mesmo aumentando indefinidamente n, a tal ponto que seja praticamente infinito, f(n) aproximar-se de um valor bem definido L, então se diz que a sequência é convergente. Se isso não acontece, ou seja quanto maior é n maior é f(n), então a sequência é dita divergente.*

*2.1 Séries – Série é uma expressão da forma*

*ou*

*sendo { an } uma sequência com = a1 + a2 + a 3 + ... + an + ...*

*note que a definição acima envolve a notação somatório Σ (sigma). Quando vemos uma expressão da forma estamos deparados com três informações básicas: a primeira é que Σ indica uma soma de vários termos; a segunda é que os termos são da forma ai, a terceira se divide em duas partes, i=x indica que o soma começa quando i=x, portanto ax, e a outra indica que a soma termina em i = n, portanto em an. Pela definição inicial de série nota-se que se inicia a soma em i = 1, e continua indefinidamente, o que é mostrado pelo símbolo .*

*2.2 Convergência e Divergência de Séries – Dada uma série*

*= a1 + a2 + a 3 + ... + an + ...*

*denota-se por a sn sua n-ésima soma parcial onde*

*sn = = a1 + a2 + a 3 + ... + an*

*se a sequência { sn } convergir diz-se que a série é convergente, caso contrário a série é dita divergente.*

*2.3 Série Trigonométrica – Uma série trigonométrica é uma série da forma*

*+*

*Onde os coeficientes a1, a2, ..., b 0, b1, b2 , ... são números reais independentes da variável x.*

Capítulo IV

**Generalização do**

**Teorema de Pitágoras**

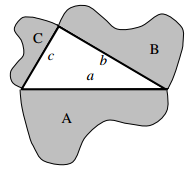
 O Teorema de Pitágoras afirma que a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos de um triângulo retângulo é igual à área do quadrado construído sobre a sua hipotenusa. A generalização do teorema de Pitágoras vem da seguinte indagação: o enunciado vale apenas para áreas de quadra­dos? Ou será que a soma da área das figuras construídas sobre os ca­tetos é igual à área da figura construída sobre a hipotenusa também para outras figuras não quadradas? Isso pode ser observado na figura a seguir:

Figura 4.1: figuras semelhantes sobre os lados de um triângulo.

O triângulo é retângulo de hipotenusa *a*. Sabendo que as figuras construídas sobre os lados do triângulo são semelhantes, ?

A resposta para esse questionamento é afirmativa. Para se chegar a uma justificativa para essa resposta deve-se tomar como ponto de partida um teorema acerca de figuras semelhantes que diz: *As áreas de duas figuras semelhantes estão entre si, assim como o quadrado da razão de semelhança.*

Nesse ponto uma demonstração para essa afirmação deve ser dada. Para melhor ilustrar o caminho da demonstração façamos a demonstração para três casos especiais: triângulos, retângulos e círculos.

Sejam os triângulos a seguir semelhantes

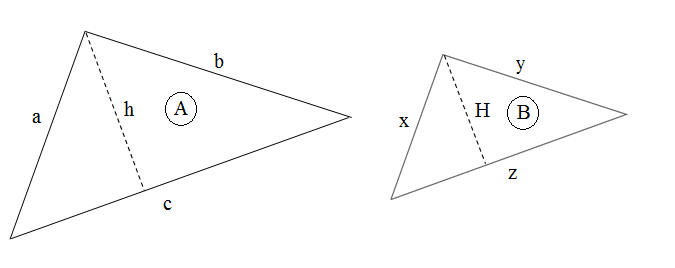


Figura 4.2: triângulos semelhantes.

Pela semelhança dos dois triângulos:



As áreas dos triângulos maior e menor são dadas pelas seguintes expressões:

 e 

A razão entre as duas áreas é dada da seguinte forma:



Como queríamos demonstrar.

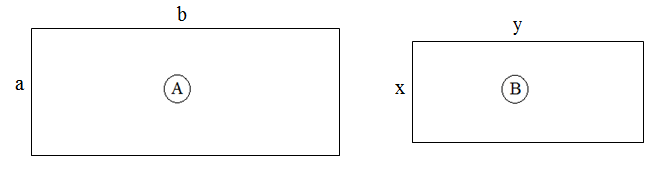
Para retângulos a situação é a mesma, e a demonstração mais simples. Dados os retângulos semelhantes a seguir:

Figura 4.3: retângulos semelhantes.

Como os retângulos são semelhantes:



A razão entre as áreas dos retângulos é definida da seguinte forma:



Como queríamos demonstrar.

Para os círculos o resultado é encontrado de maneira ainda mais simples. Por definição círculos são sempre semelhantes; sejam dois círculos de razão raio r e R, e razão entre r e R igual a *k*.

A razão entre ás áreas dos círculos é



A proposição inicial afirma a que a razão entre as áreas de quaisquer figuras planas semelhantes estão entre si como o quadrado da razão de semelhança entre elas. Quando as figuras em questão são polígonos, fica evidente a utilização da decomposição desses polígonos em triângulos semelhantes.

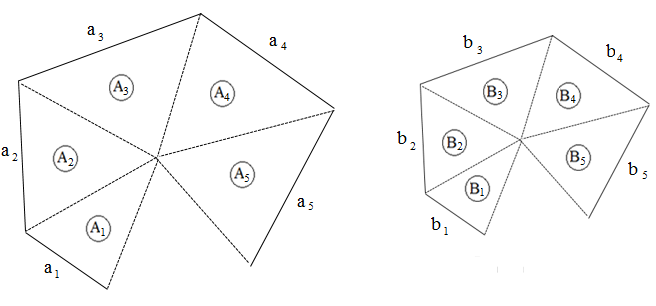


Figura 4.4: Polígonos semelhantes.

Os polígonos são semelhantes e tem *n* lados*.* Foi feita uma divisão de cada figuras em *n* triângulos, os triângulos da polígono maior são semelhantes aos triângulos do menor. Logo



Pelo fato de todos os triângulos serem semelhantes se tem



E pela propriedade das proporções





Seja *A* a área da figura maior e *B* a área da figura menor, os somatórios



e

se relacionam da seguinte forma



Como queríamos demostrar.

Para figuras não poligonais (curvas fechadas) a propriedade mencionada também é válida. A demonstração a seguir se baseia na ideia de soma infinita, e na decomposição de uma figura em infinitos retângulos.

Sejam as figuras a seguir, figuras semelhantes:

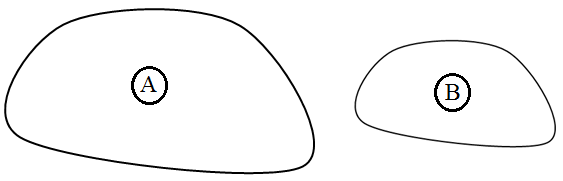


Figura 4.5: figuras não poligonais semelhantes.

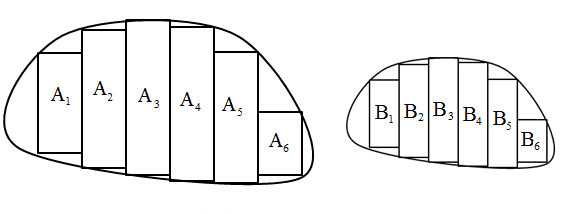
Decompondo as figuras em retângulos semelhantes vemos que as áreas A e B são aproximadas a partir da soma das áreas de cada retângulo.

Figura 4.6: decomposição em retângulos semelhantes.

Os retângulos da figura maior tem a mesma largura, assim como os da menor figura, e pelo fato das figuras serem semelhantes se tem os retângulos também semelhantes. Seja *k* a razão de semelhança entre as figuras, pelo teorema valer para retângulos como foi anteriormente se tem:



Escrevendo de outra forma temos o seguinte



Fazendo *n* arbitrariamente grande, temos cada vez uma melhor aproximação para área da figura, sendo assim, tomando *n* cada vez maior temos o seguinte.

Como



Tomando o limite em ambos os lados da equação, temos o seguinte:

Ou seja



Como queríamos demostrar.

Sendo assim a propriedade em questão é válida para quaisquer figuras semelhantes, ou seja, as áreas de duas figuras semelhantes estão entre si como o quadrado da razão de semelhança.

Para as figuras obtidas a partir dos lados do triângulo da figura no início do capítulo observamos a seguinte relação:

 e 

A primeira proporção pode ser reescrita da seguinte maneira:



Analogamente temos:



Partindo do fato de que “se duas coisas são iguais a uma terceira, então as três são iguais entre si”, estabelecemos a seguinte proporção:



Tomando como base a propriedade das proporções que afirma: em uma proporção, a soma dos antecedentes está para a soma dos consequentes, assim como cada antecedente está para o seu consequente. Assim, temos:



Por sua vez, temos:



Chegaremos às relações:



E a partir daí obter:



Lembrando-se do teorema de Pitágoras que afirma que  concluímos desta maneira que A, B e C estabelecem a seguinte relação: A = B + C.

Este resultado comprova o resultado de que, ao se construírem figuras semelhantes so­bre os lados de um triângulo retângulo, a área da figura sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas das figuras construídas sobre os catetos.

Capítulo V

**Teorema de Tales**

**Conceitos e Definições**

Os elementos básicos para o estudo em questão são: *ponto, reta* e *plano.* Aceitos sem definição, esses três objetos podem ser tomados tais qual a visão intuitiva que se tem deles. Um ponto: o ponto final das frases, a reta como uma linha reta sem fim, e o plano como uma parede também sem fim. Apesar do distanciamento que tais ideias têm em essência do seu verdadeiro significado em matemática, é muito vantajoso pensar nelas dessa forma. Essa maneira de estudar os objetos fundamentais não é única da geometria, por exemplo, um conjunto não é simplesmente uma coleção de objetos, assim como o número três não é aquilo que o representa: 3; nem um conjunto qualquer com três objetos. Mas pode-se muito bem se estudar as propriedades de números e conjuntos sem se importa com o que de fatos eles são, mas com o que se pode fazer com eles. Euclides deu uma definição para ponto e reta, dentre outros objetos:

Ponto é o que não tem partes, ou o que não tem grandeza alguma. Linha é o, que tem comprimento sem largura. As extremidades da linha são pontos. Linha reta é aquela, que está posta igualmente entre as suas extremidades. Superfície é o, que tem comprimento e largura. As extremidades da superfície são linhas. Superfície plana é aquela, sobre a qual assenta toda uma linha reta entre dois pontos quaisquer, que estiverem na mesma superfície.

Antes de enunciar o teorema de tales, é preciso ter em mente algumas definições fundamentais. Uma reta é entendida como um conjunto de pontos, mas especificamente um conjunto infinito de pontos. Duas retas que tem um ponto em comum são ditas concorrentes. Em um plano existem infinitas retas, retas pertencentes a um mesmo plano são ditas complanares. Duas retas são paralelas se e somente se são coincidentes ou são complanares e não tem ponto em comum. Em símbolos: os pontos são representados por letras maiúsculas, as retas por letras minúsculas e os planos por letras gregas minúsculas. Um feixe de retas paralelas é um conjunto de retas coplanares paralelas entre si. Em feixe de retas paralelas se define uma transversal como uma reta pertencente ao plano do feixe e que é concorrente como todas as retas do mesmo.

i

**O Teorema**

O teorema de tales é a justificativa para a veracidade das propriedades de semelhança de triângulos, e as propriedades de semelhança são por sua vez a base para a trigonometria. O fato de esse teorema ter um caráter tão fundamental e por fazer parte dos currículos do ensino fundamental acaba por acarretar um estudo inapropriado de suas consequências, e principalmente, como ele pode ser enunciado e provado. No Livro Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9 os autores enunciam esse Teorema da seguinte forma:

Se duas Retas são transversais de um feixe de retas paralelas, então a razão entre dois segmentos quaisquer de uma reta delas é igual à razão entre os respectivos segmentos correspondentes da outra.

Sejam as retas *r*, *s* e *t* da figura a seguir pertencentes a um feixe de retas paralelas.

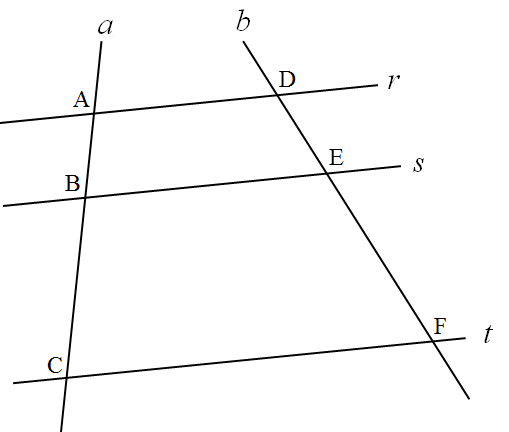


Figura 5.1: retas paralelas cortadas por retas concorrentes

Sejam as retas a e b transversais desse feixe, Teorema de Tales afirma que:



Apesar do caráter simplista da igualdade acima, o teorema é válido para quaisquer segmentos definidos por uma transversais nesse feixe. Vale ressaltar que segmentos não necessariamente precisam ser consecutivos.

Antes de demostrar o Teorema de Tales, será dada uma prova do lema a seguir:

Se uma reta paralela a um dos lados de um triângulo intercepta os outros dois lados em pontos distintos, então ela determina sobre esses lados segmentos proporcionais.

Dado o triângulo MBC a seguir sabendo que os segmentos e , são paralelos ( // ).

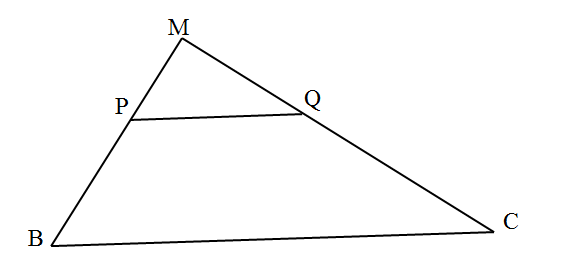
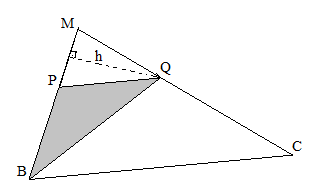


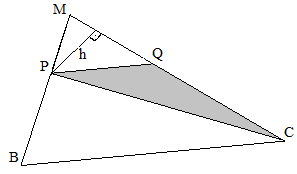
Figura 5.2: PQ e BC são pararelos

Então o lema afirma que:

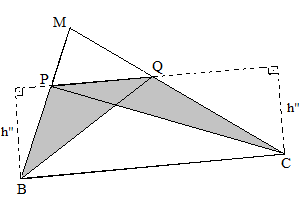
Supondo conhecida a fórmula da área do triângulo.

i) Os Triângulos QMP e QPB tem a mesma altura h. A razão entre suas áreas é



ii) Os triângulos QMP e QPC tem a mesma altura h’ a razão entre suas áreas

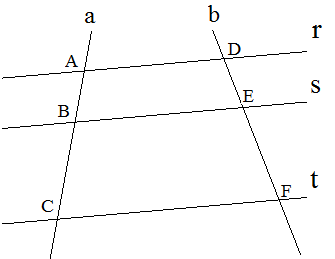
Os triângulos QPB e QPC tem a mesma base e mesma altura logos suas áreas são iguais:

Tem-se a partir de i) e de ii) as seguintes igualdades

Assim

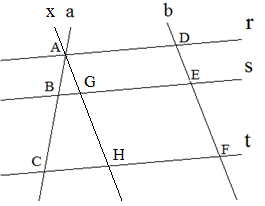
Como queríamos demonstrar.

O lema demonstrado anteriormente é muitas vezes chamado de Teorema Fundamenta da Proporcionalidade (TFP). O teorema te tales é demonstrado como uma consequência trivial da aplicação desse teorema a um feixe de retas paralelas cortadas por transversais. Antes da demonstração ser feita algumas observações devem ser feitas. A prova dada ao TFP se baseia no conceito de áreas, e mais especificamente na área de triângulos. Uma abordagem mais profunda do tema quereria a comprovação de que uma análise mais detalhada do conceito de área e das fórmulas usadas. Um leitor mais detalhista pode se pergunta se de fato e ambas usadas para área do triângulo QMP, são de fato iguais.

Sejam as retas r, s e t paralelas.

Considerando uma reta x paralela a b e que passa por A.

A existência dessa reta é garantida pelos axiomas de Euclides

Considerando o TFP

Mas claramente os segmentos e tem o mesmo comprimento assim como também e tem o mesmo comprimento. Assim

Como queríamos demonstrar.

Capítulo VI

**Tópicos de Cálculo**

Para uma abordagem concisa do Cálculo seria necessário o estudo de limites e suas propriedades. Tal estudo envolve uma série de detalhes técnicos que apesar de úteis para demonstração de muitos dos teoremas acerca de derivadas e integrais pode ser dispensado em um primeiro contato com esses conteúdos. A ideia de limite é bastante intuitiva e, tomados certos cuidados, é possível tirar proveito no estudo de alguns limites fundamentais sem, no entanto, adentra-se demais à formalização. Dessa forma, o Cálculo pode ser visto em três níveis de formalização: o primeiro seria o do ensino médio em que seriam apresentadas às ideias de derivadas e integrais, sem se fazer necessário um estudo aprofundado de limites; o segundo nível é um curso de cálculo na graduação, em que o discente entra em contato com a ideia de limite em sua forma intuitiva e precisa. A partir daí constrói os conceitos de derivada e integral; o terceiro nível seria um curso de análise no qual o estudante aprofundaria seu estudo na compreensão do Cálculo Real, formalizando a ideia de número, de funções e limites.

i

**Diferenciação**

Algumas das ideias referentes à derivação podem ser estudadas em conjunto com o conteúdo de funções. Um exemplo disso seriam as funções polinomiais, funções que tem como domínio e contradomínio subconjuntos dos reais e que tem com como regra de associação um polinômio. Vale ressaltar que esse estudo requer uma bagagem considerável do estudante, por exemplo, para se estudar as funções da forma , se faz necessário o conhecimento da expansão de . Outro ponto interessante é mostrar ao estudante que no ponto de abcissa *x*,  é a concavidade da reta que é tangente à função *f* naquele ponto. Em uma abordagem mais formal, a reta tangente ao um ponto de abcissa *x* em uma função *f* é definida justamente como aquela que tem concavidade . Mas para o estudante que está em contato pela primeira vez com o Cálculo, ilustrar que reta tangente a uma curva é uma reta que toca em apenas um ponto da curva nas proximidades daquele ponto, é o suficiente.

No estudo de funções afim, um detalhe interessante seria a taxa de variação da função. Uma função afim é uma função com domínio e contradomínio nos reais e que tem a seguinte regra de associação:



Onde: *a* e *b* são números reais, e *f*(*x*) e o valor da função em *x.*

Um ponto crucial no estudo de funções afim é perceber que para todo  pertencente ao domínio da função e todo , a razão



é constante, e não depende de *x.*

Como efeito  e , dessa forma:



e a razão , não é função de *x.* Na verdade a únicas funções onde a taxa de variação não é função de *x* são as funções afim. A taxa de variação como definida emacaba sendo uma forma de caracterizar e estudar funções. A fim de verificarmos que outras funções não têm taxa de variação constante tomemos as funções quadráticas com domínio e contradomínio nos reais. Toda função quadrática é da forma , com *a, b* e *c,* pertencentes aos reais, e . Seja o caso particular em que . A diferença é igual a . Nota-se que a razão  é dada em função de *x* e *h.* Com efeito . O que deve ficar claro para o estudante é que a taxa de variação dessa função em particular é diferente em cada ponto. Sabendo a taxa de variação em um ponto de abscissa *x* somos capazes de calcular a taxa em um ponto de abscissa . Nesse ponto introduz-se a técnica de tomar o limite, usada no Cálculo. O passo consiste em supor *h*, tão pequeno que seu valor não interfira nos cálculos de . Ou seja, um *h* muito próximo de 0. Em termos matemáticos, isso seria o mesmo que tomar o limite indicado abaixo



Essa expressão pode ficar intuitivamente mais clara quando se fizer notar que a razão a qual se quer tomar o limite é igual a , e que tomar o limite com *h* tendendo a 0, pode ser encarado como igualar o próprio *h* a 0. Assim:



Com essa igualdade agora somos capazes de calcular a taxa de variação em qualquer ponto do domínio da função definida por , que é justamente 2*ax.* Essa expressão em *x* pode ser vista como uma função, com domínio igual ao domínio da função *f*. Façamos  temos uma nova função que chamaremos a função derivada de *f* , ou a derivada de *f.* Deve-se deixar claro nesse momento que a derivada é diferente para funções diferentes. Nos dois casos vistos agora isso se verifica, com efeito, sejam ambas as funções com domínio e contradomínio nos reais: a primeira função , tem como derivada, a função ; enquanto que a função , tem como derivada a função .

Como forma de aprofundar o estudo em questão pode-se propor ao estudante que encontre a derivada das funções  e . Seguindo os passos propostos e usando um pouco de álgebra elementar o estudante encontrará , e de . Aqui se pode notar que um função definida por um polinômio de grau 1, tem como derivada um polinômio constante (abusando da notação, de grau 0), uma função definida por um polinômio de grau 2, tem com derivada uma função definida por um polinômio de grau 1, e pelo menos uma função que é definida por um polinômio de grau três tem como derivada uma função definida por um polinômio de grau três. Nesse ponto pode-se estudar o caso geral onde a função é definida por . Com um pouco de álgebra pode-se chegar ao resultado:



Note a expansão binomial de , fazendo a diferença e tomando as divisões por *h* obtemos:



Ao se tomar o limite



Todas as parcelas da soma a partir da segunda se anulam, ou seja:



Para a função em questão , a derivada é da forma . Seguindo a apresentação dos conteúdos de derivação o estudante pode ser apresentado às regras comuns da derivação, e que são amplamente usadas. O professor deve atentar para a notação e para o fato de que em uma primeira abordagem do Cálculo, certas regras podem ser apresentadas sem demonstração desde que o estudante seja alertado que tais demonstrações existem:

Definindo , as seguintes regras podem ser verificadas:

1. : a derivada de um constante é 0;
2. : a derivada do produto de uma constante por uma função é igual ao produto da constante pela derivada da função;
3. : a derivada da soma de duas funções é soma das derivadas das duas funções;

E a regra iv que na verdade é um caso particular da derivada de , que encontramos anteriormente:

1. .

Como essas regras fica fácil calcular a derivada de qualquer função polinomial, em particular seja , sua derivada é da forma. A quarta regra é uma maneira inteligente de dizer que de fato uma função definida por um polinômio de grau *n*, tem como derivada uma função de grau *n*–1.

Mas deve-se atentar para a regra da multiplicação e da divisão. Na verdade as duas regras são bastante simples, só que devem ser tratadas com sensatez, devido ao seu caráter altamente técnico. Por outro lado elas serão muito úteis no estudo de outras funções, a chamadas funções transcendentes, nome dado a todas as funções não polinomiais.

1. 
2. 

No estudo das funções não polinomiais, como a função exponencial, alguns cuidados devem ser tomados.

Seja a função definida por com domínio e contradomínio nos reais, calculemos a derivada de exp(*x*) da maneira usual:



Note que não se pode simplesmente eliminar o *h* no denominador, fazendo, para obter o limite, a substituição de *h* por 0. Mas como o que interessa é a expressão em *h*, Tudo o que não for acaba sendo colocado para fora do limite



Mas o limite no segundo membro da igualdade é igual a 1, por definição. Para deixar mais claro o porquê essa definição, tomemos a derivada de uma função da forma , assim:



Mas o limite é igual . Assim. E as funções exponenciais são as únicas que a derivada é proporcional à própria função. Para o caso da função , deve se atentar que deve existir uma função exponencial para a qual . Dessa forma a derivada de  seria . Essa função tem por definição como base o número , onde . Outro ponto interessante na funçãoé que quando a abcissa é 0, a concavidade da reta tangente ao gráfico da função tem valor 1.

Outra classe de funções que são bastante convenientes para o ensino médio são as funções trigonométricas. Seja , a função derivada de *f* tem a seguinte forma



A partir dessa igualdade concluímos que a justificativa para o resultado da derivada não ser interessante para alunos desse nível de ensino, com base nisso deve-se deixar claro que

e 

Mas esses dois resultados podem ser usados para verificar a igualdade



Chega-se a esse resultado aplicando a regra da divisão e derivadas da função seno e cosseno para encontrar a derivada do consciente



Como em toda a matemática o estudo do Cálculo, demanda tempo e dedicação. Em uma primeira vista a notação usada no estudo de derivadas e integrais pode assustar ao aluno que não é familiarizado com a linguagem matemática. Dificuldades com a forma como é escrita essa ciência é um dos problemas mais graves que assolam o ensino. Em certos pontos mesmo o docente tem dificuldades com a linguagem matemática. Isso faz com que ele acabe repassando essas mesmas dificuldades para o estudante. Fazer matemática também é escrever matemática. A notação tem o papel de padronizar e facilitar a troca de informações. Mas deve ser praticado o bom censo no ensino, a notação não é o foco do ensino, a linguagem é um meio para facilitar a apresentação dos conceitos.

ii

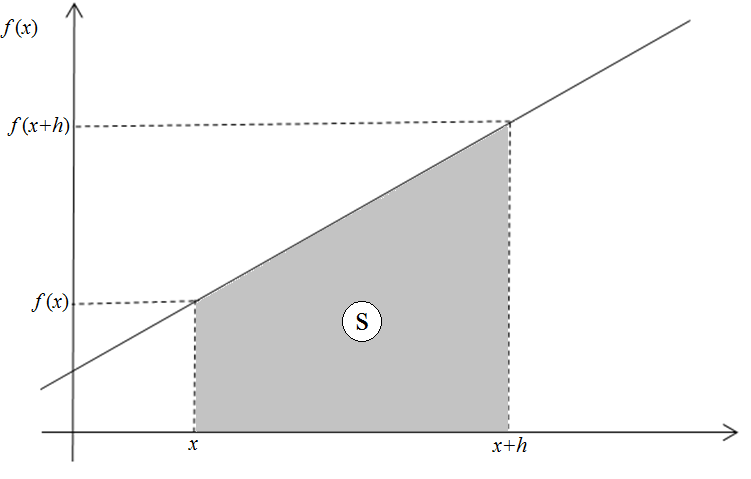
**Integração**

Geometricamente derivar uma função em um ponto é encontrar a equação da reta tangente à curva da função naquele ponto. Podemos encarar uma derivada como sendo uma função com domínio igual ao domínio da função original. Por outro lado a ideia de integral é mais sútil, em termos de diferenciar uma da outra se deve mostrar para o aluno que não se integra uma função em um ponto, como foi feito na derivação. Nesse momento surge a ideia de integral definida em um intervalo. Em termos gerais, integrar uma função em um intervalo de seu domínio é encontrar a área delimitada pelo gráfico e o eixo da abcissas naquele intervalo.

Façamos esse estudo por partes, tomemos uma função afim, de domínio e contradomínio no conjunto dos reais:



Suponhamos que o gráfico de *f* seja da forma da Figura abaixo



área sob o gráfico de uma função afim

Para se calcular a área da região S observemos que a região é um trapézio retângulo. E sua área é dada pela expressão



Nota-se que a área é dada em função de *x* e de *h.*

A expressão encontrada é a integral da função , no intervalo [*x*, *x+h*], em símbolo:

seja , 

Ao se analisar esse resultado pode-se tirar algumas conclusões sobre integrais: a primeira é que seu estudo demanda um pouco mais de trabalho do que o estudo de derivadas. Nesse ponto o professor pode decidir entre encerrar o estudo do cálculo e mostrar algumas aplicações, ou em dar continuidade e apresentar a integral em sua forma genérica, e essa é ideia principal desse estudo: apresentar intuitivamente os conceitos da integração, de maneira que o estudante do ensino médio possa fazer o uso desse conhecimento para resolver uma série de problemas de matemática e de outras ciências.

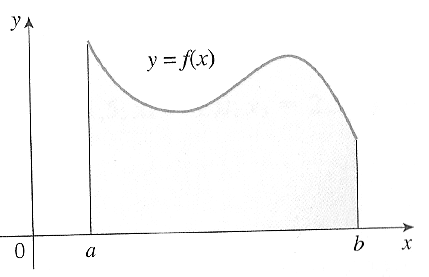
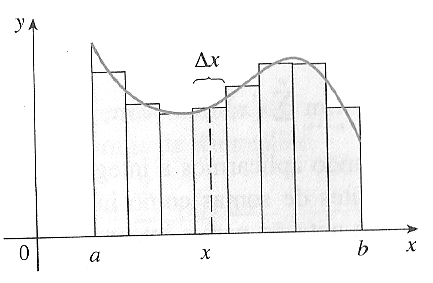
Seja *f* uma função com domínio e contradomínio no conjunto dos reais, e seja a Figura 5 abaixo o gráfico dessa função.

gráfico da função *f* no intervalo [*a*, *b*]

A fim de calcularmos a área sob o gráfico de *f* (*x*), dividiremos a área em *n* retângulos de largura . Um ponto a ser mostrado em sala de aula é que ao se fazer , temos . Ou seja, quanto em mais retângulos se divida a região mais o termo se aproxima de zero. A área sob o gráfico é aproximadamente a soma das regiões dos retângulos em que ela foi subdividida, sendo que essa soma se tornará mais precisa, quanto maior for *n.*

aproximação da área por retângulos de largura 

Para a função em questão



Nesse somatório está embutida ideia de que  foi subdividido em *n* intervalos de largura basta notar que . Pode optar por fazer o cálculo dessa área em termos de aproximações reais: dada uma função *f* calcula-se para um *n* devidamente pequeno cada um dos valores .

A título de ilustração façamos a soma em questão para uma função afim no intervalo [*x, x+h*], com *n* intervalos de largura :







Mas  e , e a igualdade se reduz a seguinte expressão:



Tomando o limite da expressão quando  se aproxima de zero:



Note que a expressão obtida para o limite é justamente o valor da área sob o gráfico, obtida anteriormente.



A área sob o gráfico da função , também poderia ser achado seguindo a mesma lógica. A título de ilustrar esse fato, façamos as contas para , para o intervalo [*x*, *x+h*]:







Como estamos dividindo o intervalo [*x*, *x+h*] em *n* intervalos todos de comprimento , podemos reescrever a última expressão da seguinte maneira, lembrando que  e que. Uma expressão não evidente que aparece é .



Tomando o limite quando se aproxima de 0, no segundo membro da igualdade, obtemos



Assim para  temos que a integral definida de *f*, no intervalo [*x*, *x+h*] tem a seguinte forma:



Comparando ao caso da integral de , quando  e . Temos:



Considerando como termo variável *h*, pode-se observar que a integral de uma função definida por um polinômio de grau 1 é um função definida por um polinômio de grau 2, enquanto que a integral de uma função definida por um polinômio de grau 2 é uma função definida por um polinômio de grau 3. Cabe aqui ressaltar que o ponto chave da integração é achar a área sob uma curva de uma função, enquanto que o ponto chave da diferenciação é achar a concavidade de uma reta tangente à função em um ponto bem definido. Mesmo apesar dessa aparente disparidade entre os dois conceitos, pode-se provar que diferenciação e integração estão interligadas pelo Teorema Fundamental do Cálculo que diz o seguinte:

* Sejam F e *f* funções com domínio e contradomínio no conjunto dos reais, se  então . A recíproca também é verdadeira para o teorema (C é uma constante qualquer, na verdade uma função tem infinitas integrais, todas da forma , com C um número real).

Esse teorema é passível de algumas observações, a primeira é que as funções em questão tem por obrigação serem contínuas. A ideia de continuidade no ensino médio pode ser pensada como funções que tem como gráfico uma linha sem buracos, ou falhas. Daí surge a ideia de integral indefinida, que é na verdade uma outra função, como é a derivada.

As regras de integração são bastante semelhantes às de diferenciação:

1. 
2. 
3. 

Além dessas regras existem outras que podem ser dispensadas em uma primeira vista do cálculo, inclusive regras de diferenciação, como a regra da cadeia. Em suma, integrar é um pouco mais trabalhoso do que diferenciar, pois nem sempre fica claro qual regra usar na hora de encontrar a integral de uma função. As três logo acima servem para integramos qualquer



função polinomial. Como forma de exercício, façamos:  e para :



por outro lado





Tomando como base as definições acerca das funções exponenciais e trigonométricas, o estudante pode ser orientado a pesquisar sobre a integral de cada uma delas em especial a função . Como sabemos que . Estudante deve perceber que . Outras integrais acessíveis ao estudante são a integral da função seno e da função cosseno:

 e 

Feitas essas observações o estudante estará pronto para lhe dar com as aplicações do cálculo, que vão desde as ciências sociais até a física.

**Aplicações do Cálculo**

Seguindo as tendências modernas da educação que defendem que a aplicação dos conteúdos ocupa lugar central no ensino da matemática nos níveis fundamenteis, apresentaremos aqui algumas aplicações dos conceitos de derivação e integração. O professor pode tomar duas atitudes distintas com relação às aplicações: mostrar aplicações ao mesmo tempo em que ensina as ideias de cada um dos conceitos do cálculo, ou apresentar a parte técnica de início e em seguida usar os conceitos para a resolução de problemas. Isso tem algumas consequências, pode ser bom estudar separadamente conceitos e aplicações, torna-se mais simples de ensinar e exercitar, mas pode gerar a ideia errônea de como os conteúdos evoluem, pois essencialmente o Cálculo surgiu como estratégia de resolver problemas práticos. Por outro lado, dependendo da turma, estudar em conjunto Cálculo e aplicações, pode confundir e acabar prejudicando o bom ensino. Pode-se dosar o estudo dos conceitos (manipulação) e aplicações, usando-as para dar significado àquilo que se estuda, porém é interessante que se tenha um tempo dedicado exclusivamente ao estudo das aplicações.

**Aplicações de Derivadas**

A primeira aplicação a que se propõe a derivação é encontrar a equação de uma reta tangente a uma curva em um ponto específico, isso é em essência a motivação para a própria definição de derivada.

“O problema da tangente deu origem ao ramo do cálculo chamado *cálculo diferencial*, que foi inventado mais de 2 mil anos após o cálculo integral. As principais ideias subjacentes ao cálculo diferencial devem-se ao matemático francês Pierre de Fermat (1601-1665) e foram desenvolvidas por pelos matemáticos ingleses John Wallis (1616-1703), Issac Barrow (1630-1677) e Issac Newton (1642-1727) e pelo matemático alemão Gottfried Leibniz (1646-1716).” (STEWART, 2006, p. 4).

Seja a função, definida pela seguinte regra de associação , o gráfico da função tem a seguinte forma:

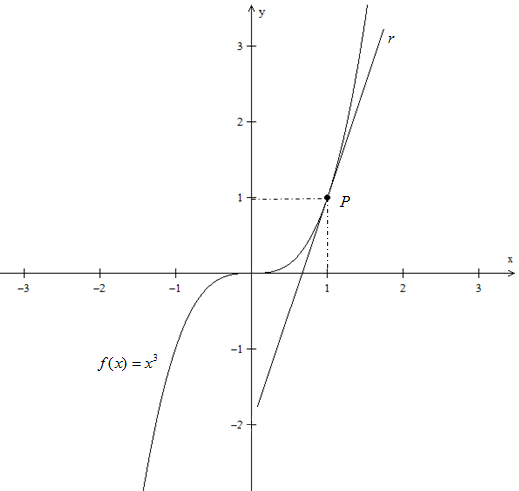


Figura : reta tangente ao gráfico função *f* no ponto *P*

A reta *r* toca o gráfico da função *f* no ponto *P*. Como mostrado na Figura 7. Calculemos a equação dessa reta:

Sabemos que  é a concavidade da reta tangente à função no ponto de abcissa *x*. Para a função em questão . Como *P*(1,1), temos para a declividade de *r:*



Uma reta de declividade *m* que passa pelo ponto *P*(*x*0, *y*0) tem a equação da seguinte forma: . Assim a reta *r* tem equação . Ou seja, a equação da reta *r* é .

Um problema conceitualmente acessível ao estudante do ensino médio envolve uma série de conceitos ricos de detalhes, que podem muito bem ampliar sua bagagem matemática. Além da ideia de reta tangente a derivada de uma função em um ponto pode servir para encontrar os pontos de máximo e mínimo de uma função. O professor pode investigar junto com discente a questão de quando houver máximos ou mínimos de uma função *f*, esses pontos serão justamente onde . A título de ilustração façamos esse estudo para a função , definida por:



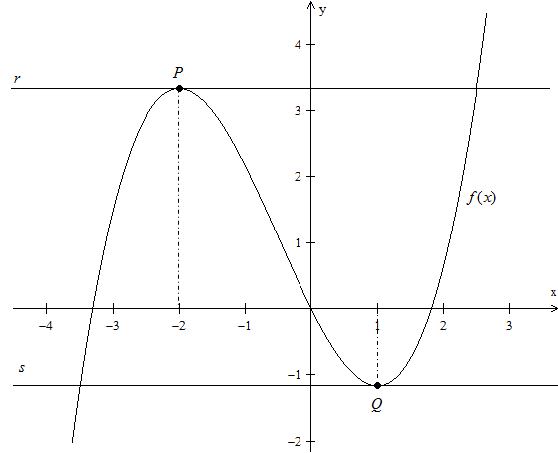
O gráfico dessa função é da forma da Figura a seguir:

Figura : máximos e mínimos locais da função *f*

Os pontos *P* e *Q* são respectivamente um máximo e um mínimo local da função *f*. Mas como indicado na figura são pontos onde as retas tangentes tem declividade igual a 0, ou seja são pontos onde . Para , temos , fazendo , obtemos . Uma equação do segundo grau que tem como raízes – 2 e 1. Como indicado na figura. A resolução da equação  nos permitiria ver justamente achar esses pontos de máximo e mínimo sem a necessidade de fazer o gráfico da função *f.* É o caso para a função , definida por . A função quadrática. O ponto de máximo ou mínimo dessa função é aquele cujo , ou seja, o ponto em que . Essa equação nos dar a abcissa do vértice da função quadrática que pode ser obtida calculando o ponto médio entre os zeros da função, com efeito:



Uma abordagem semelhante pode ser feita para funções

, definidas por .

Seus pontos de máximo são justamente aqueles em que . Ou seja, em que . Fazendo os cálculos para a equação, obtemos:



Que são justamente as abcissas onde a equação da reta tangente tem concavidade igual a 0. Note que a expressão acima só faz sentido quando .

O professor deve ficar atento ao fato de que  muitas vezes é confundido com os zeros da função. Na maioria dos casos, encontrar os zeros de uma função não é um trabalho fácil. Uma resolução para equações do segundo grau era conhecida por Bhaskara Acharya (1114 - 1185), mas há registros de que a solução desse tipo de equação já era conhecida dos babilônios por volta de 2000 a.C.

“Perto do ano 2000 a.C. a aritmética babilônica já havia evoluído para uma álgebra retórica bem desenvolvida. Não só se resolviam equações quadráticas, seja pelo método equivalente ao da substituição numa fórmula, seja pelo método de completar quadrados, como também se discutiam algumas cúbicas (de grau três) e algumas biquadradas (grau quatro).” (EVES, 2004, p. 61).

Por volta do século XI, foram descobertas as fórmulas para a resolução de equação de grau três e quatro. Esse feito é da autoria de Nicolo Tartaglia (1499 - 1557), que encontrou uma fórmula para resolução das equações da forma . Enquanto que Ludovito Ferrari (1522-1565) que achou a solução das equações da forma . A questão era se seria possível encontrar a solução para qualquer equação de grau *n*. Leonhard Euler (1707 - 1783), tomando como base os trabalhos de Tartaglia tentou encontrar uma solução para equação de grau 5 não obtendo sucesso, o mesmo ocorrendo com Joseph Louis Lagrange (1736 – 1813).

“Após a apresentação do que hoje chamamos de Teorema Fundamental da Álgebra, por Gauss em sua tese de doutorado, alguns matemáticos se empenharam em tentar descobrir se existia uma fórmula resolutiva para equações polinomiais de grau maior do que quatro, por meio de radicais. Coube ao matemático francês Évariste Galois (1811 - 1832), completando um trabalho do matemático norueguês Niels Henrik Abel (1802 - 1829), demonstrar a impossibilidade dessa resolução.” (FERNADEZ & SANTOS, 2010, p.2).

Essa impossibilidade na resolução de equações de grau superior a 4, pode parecer um entrave para encontrar os zeros de funções polinomiais. Mas Existe um algoritmo eficiente que permite encontrar aproximações precisas das soluções de uma equação, é o chamado método de Newton. Segundo esse método se  é um valor próximo de uma solução de , a sequência  de números reais obtidos pela fórmula iterativa



tem como limite a solução de . Munido de uma boa calculadora e os conhecimentos de derivação o estudante pode encontrar boas aproximações de qualquer equação. Esse método é útil não somente para equações polinomiais, mas também para qualquer tipo de equação da forma , com *f* derivável.

Feitas essas aplicações da derivada na matemática, é interessante mostrar ao estudante também aplicações desse conceito em ciências como um todo. “Algumas aplicações mais importantes do cálculo diferencial são os problemas de otimização” (STEWART, 2006, p. 279). O problema da otimização está ligado diretamente ao encontra em uma função os pontos que a maximizam ou a minimizam. Problemas como esse são resolvidos o tempo todo por engenheiros, por exemplo, sempre buscando as soluções que são melhores financeiramente ao mesmo tempo mais seguras. Ou mesmo por economistas que sempre procuram a maneira mais rentável de se investir um capital. Para ilustrar esse método trabalharemos um típico problema envolvendo otimização, extraída de STEWART, 2006, p. 333:

Uma lata cilíndrica é feita para receber um litro de óleo (Figura ). Encontre as dimensões que minimizarão o custo do metal para produzir a lata:

O que se quer é achar a menor área da superfície cilíndrica que contenha um volume de 1 litro

A área do cilindro é dada pela expressão. Para eliminar o *h* na expressão basta observar que . Estamos levando em consideração o fato de que 1 litro é

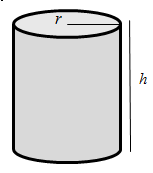


Figura : cilindro de raio *r* e altura *h.*

igual a 1.000 cm³. Assim obtemos , que pode ser substituído na expressão para a área, se obtendo assim a expressão:



Queremos um valor mínimo para área, primeiro deve-se perceber que área é dada em função de *r*, ou seja, . Assim tomemos a derivada de *A*, que é da forma:



Mas queremos um valor de *r* tal que , ou seja,



O que nos dar com solução , ou seja, nossa solução será próxima de 5,42 cm. Como , temos que cm. Esses são os valores que área do cilindro superfície é a mínima quando seu volume é de um litro. □

Quando lidamos em física com as funções horárias do espaço, temos dois pontos interessantes: o primeiro é que a derivada da função em um ponto qualquer calcula justamente a velocidade naquele ponto. Aqui surge a ideia de segunda derivada, como a derivada da derivada de uma função, que é para as funções horárias o valor da aceleração no ponto dado. Com exemplo, seja um objeto em queda livre, sabemos que a para uma altura *h* de onde o objeto é largado, a função horária é da forma , *y* é altura do objeto se encontra do chão no instante *t.*

Um corpo é lançado de uma altura de 120 m. calcule a velocidade do objeto após 1,5 s de queda, qual será a distância desse corpo do chão nesse instante?

Sabemos que a velocidade no instante *t* é dada por . Temos para o problema em questãoassim . . O sinal da velocidade é devido ao fato de que o corpo se aproxima do ponto onde se considera com origem de todo o processo, e não vai subir, em direção ao céu. A altura naquele instante é dada substituindo t por 1,5 na função assim, . □

Como última aplicação de derivadas calculemos a equação de retas tangentes a curvas que não tem uma representação explícita pra sua equação, é caso das elipses, por exemplo, que são da forma:



Antes de nos aprofundarmos nesse ponto é importante se fazer dois comentários, uma curva que não tem uma forma explícita é um tipo de curva que não pode ser escrita da maneira usual , geralmente elas tem a forma , é o caso da equação da elipse, como mostrado anteriormente ou da circunferência; o segundo comentário é o referente à derivadas de funções compostas: a regra da cadeia.

Sejam as funções *h*, *f* e *g* com domínio e contradomínio no conjunto dos reais, tais que:, então , ou com a notação que viemos usando



A título de exercício façamos a derivação da equação da elipse, temos:

, que nos dar: .

Usando a regra da cadeia, obtemos . Ou seja . Um ponto curioso é que a derivada de uma função implícita é dada em função de *x* e *y.*

Dada uma elipse de equação , como a da figura a seguir. Encontre a equação da reta tangente à elipse no ponto de . Calcula-se que nesse ponto a declividade da reta é dada por , assim naquele ponto a reta tangente *r* tem equação.

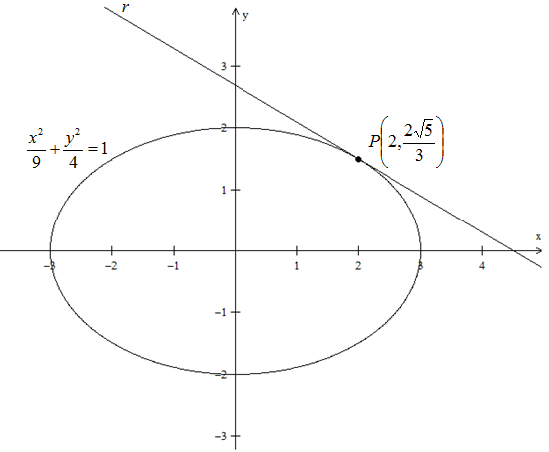
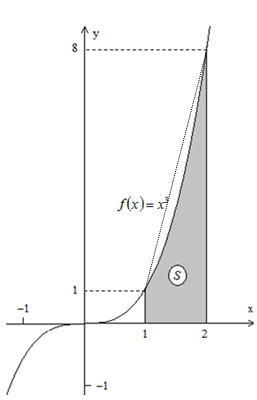


Figura: reta tangente a elipse no ponto *P.*

A derivação implícita nos permite calcular a equação de reta tangente a qualquer curva em um determinado ponto. Mesmo exigindo do estudante uma boa dose de trabalho e abstração é interessante que ela seja apresentada, mesmo que apenas em sua forma mais simples, quando lidamos com cônicas. Esse tipo de derivação também é uma maneira de justificar o uso da regra da cadeia.

**Aplicações de Integrais**

A ideia principal do cálculo integral é calcular a área sob uma curva. Como primeira aplicação dessa ideia, calculemos essa área para o caso de , no intervalo de [1, 2]. Pelo que foi estudado sabemos que a área da região *S* indicada na figura é da por:

.

Figura : área sob o gráfico da função no intervalo definido*.*

Fazendo os cálculos obtemos:



Essa é uma resposta bastante razoável. Como forma de comparação seja trapézio com vértices em , ,  e . Como pode ser observada na Figura 11, a área desse trapézio deve ser maior do que a área da região *S*, com efeito, a área do trapézio é:



Comparar a área sob um gráfico com uma área de uma figura que se sabe calcular com precisão sem o uso de integrais é uma estratégia de confirmar o que se espera como resultado, além justificar os cálculos que foram feitos. Mesmo que para o caso a diferença entre as duas áreas seja bem pequena deve-se deixa claro que uma aproximação como a feita a partir do trapézio não pode ser substituir o cálculo preciso obtido com o uso de integrais.

O estudo de integrais envolve uma série de detalhes que podem fazer muitos dos estudantes não acompanharem a apresentação. Nesse ponto o professor pode encerrar a apresentação da matéria. Deixando as técnicas de integração, com os métodos da substituição e da integração por partes para um segundo curso de cálculo. Mas a riqueza do cálculo fica muito bem mostrada com o que já foi mostrado até agora. Cabe ao estudante escolher entre dar continuidade ou não ao estudo dessa disciplina.

Para encerrarmos o estudo de aplicações do cálculo, falemos de duas aplicações das ideias de integração e diferenciação: o crescimento populacional e a meia vida de amostra radioativa.

Quanto cresce uma população? Essa pergunta apesar de não ser exatamente objetiva, tem resposta, uma população cresce conforme sua quantidade. Ou seja, supondo condições ótimas do ambiente, uma polução de seres vivos cresce proporcionalmente à quantidade de seres vivos existentes, isso pode ser escrito da seguinte forma:



Façamos algumas considerações acerca da igualdade anterior *P*(*t*) é população dada em função do tempo, o consciente  é a taxa de variação da função, que diz o quanto a função *P* cresce. Note a constante de proporcionalidade *k.* O que está sendo feito aqui é uma modelagem matemática para um fenômeno biológico. Isso é um ponto interessante a ser ensina ao estudante, pois aí reside o maior triunfo do cálculo: as equações diferenciais.

Pode-se notar que estamos dizendo que a derivada de *P* é um múltiplo da própria função *P.* As únicas funções que conhecemos com essa propriedade são as funções exponenciais.Com efeito supondo  , temos . A constante *C* é um número real, qualquer, para o estudo em questão *C* é a população no instante *t* = 0, quando se inicia o estudo da polução em questão assim: , onde é a polução inicial. Acabou de ser feita a resolução de uma equação diferencial. Mesmo que essa resolução tenha envolvido mais a suposição do que uso de técnicas e, além disso, foi dada a condição de contorno .

1. Uma forma elegante em matemática de negar que a ideia representada por um símbolo seja verdadeira é cortando-o com um traço transversal. Isso acontece em várias ocasiões, uma já citada: não é verdade que é representado por , outra a título de curiosidade quando um número inteiro a é divisor de outro inteiro b, dizemos que *a* divide *b*, e escrevemos , caso isso não aconteça escrevemos . [↑](#footnote-ref-1)
2. Muitos historiadores da matemática acreditam que Cantor não considerava toda e qualquer coleção como um conjunto. Há estudiosos que veem indícios de que ele desconsiderava como conjuntos aquelas coleções que eram elementos de si mesmas. [↑](#footnote-ref-2)
3. Essa afirmação é na verdade um forte axioma, e faz parte de uma Teoria Consistente dos Conjuntos. [↑](#footnote-ref-3)
4. Outro axioma de conjuntos. [↑](#footnote-ref-4)